Complete positivity in operator algebras

AUTHOR(S):

富山, 淳

数理解析レクチャー・ノート　4.

Complete positivity in operator algebras

富　山　　　淳　著

1978年5月

数理解析レクチャー・ノート刊行会

数理解析レクチャー・ノート 4.

Complete positivity in operator algebras

富山 淳 著

1978年 5月

まえがき

この稿は1978年3月数理解析研究所で行った作用素環における completely positive の概念についての集中講義をまとめたものである。Completely positive の概念は作用素環論ではじめ positivity の議論(GNS−表現の構成等)のかげにかくれた形になっていたが非可換の無限次元の対象としての作用素環の順序構造をとらえる基本的な概念として最近関連する結果が急速に作用素環の構造論の中心的話題になってきている。ここでは内容の構成はその中でも semidiscrete von Neumann 環と injective な von Neumann 環(§3)又 nuclear C^*環の characterization(§4)を中心に関連する completely positive についての基本的な結果の証明をすべて省略せずに講義を行ったがいくつかの話題はぬかさざるを得なかったのであとがきとしてそれらについて簡単な説明をつけ加えた。

京都大学数理研のみならず大阪や東京から又遠く沖縄から講義に参加して下さった方々、又種々お世話になった数理研の荒木教授, F. Hansen 氏に深く感謝します。

1978年4月

富山淳

Complete positivity in operator algebras

目　　次

§1. Operator algebra 間の completely positive map

以下 C^* 環を $A, B \cdots$ とかく。C^* 環には特にことわったとき以外は単位元を仮定しない。単位元をもつ C^* 環をユニタルな C^* 環と呼ぶ。M_n を $n \times n$ の行列環，又 A 上の $n \times n$ の行列 C^* 環を $M_n(A)$ とかく。$M_n(A)$ は A と M_n との C^*-テンソル積とも見られる。τ を C^* 環 A から C^* 環 B への線型写像としたとき，τ からつくられた $M_n(A)$ より $M_n(B)$ への写像

$$\tau_n = \tau \otimes 1 \,;\, M_n(A) \longrightarrow M_n(B)$$
$$[a_{ij}] \longrightarrow [\tau(a_{ij})]$$

を考える。τ_n が positive map の時 τ を n-positive map という。任意の n について n-positive のとき，τ を completely positive map という。以下これを略して CP-map と呼ぶことにする。A, B がユニタル C^* 環で $\tau(1_A) = 1_B$ のとき，τ をユニタル map ということにする。CP-map は特に positive map であるから，C^* 環では positive functional が有界になることをもとにすると，自動的に有界な写像になることがわかる。

CP-map については先ず最初に positive map との関連が問題になるが，対象の作用素環が非可換になったとたんにその喰違いがあらわれる。即ち positive map で CP-map でない最も簡単な例は次のようなものである。

$\tau ; M_2 \longrightarrow M_2$ を transpose map とする

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$$

この τ が positive map であることは明らかであるが今 $\{e_{ij}\}$ を M_2 の matrix unit とし $\varepsilon \in M_2(M_2)$ を

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12}\\ e_{21} & e_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ととると、ε は positive であるが $\tau_2(\varepsilon)$ は以下の枠内をみればわかるように positive matrix ではない。

$$\tau_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{21}\\ e_{12} & e_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

次の Lemma はその構造の簡単さの割にはこの講義の全てにわたって有用なものである。

<u>Lemma 1.1.</u> $M_n(A)$ の positive な元は

$$[a_i^* a_j] \quad (a_1, a_2 \cdots a_n \in A)$$

の形の行列の和である。

証明. $M_n(A)$ の positive な元 x^*x をとり、$x = [b_{ij}]$ とおくと、

$$x^*x = \Big[\sum_k b_{ki}^* b_{kj}\Big] = \sum_k [b_{ki}^* b_{kj}]$$

即ち $(b_{k1}, b_{k2}, \cdots b_{kn})$ による上の形の行列の和になっている。又上の形の行列は

$$[a_i^* a_j] = \begin{bmatrix} a_1, a_2 \cdots & a_n \\ & 0 & \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} a_1 \cdots & a_n \\ & 0 & \end{bmatrix} \geq 0$$

<u>Lemma 1.2.</u> C^* 環 A 上の positive linear functional φ は CP である。

証明. 前の Lemma から $M_n(A)$ の positive matrix を $[a_i^* a_j]$ の形と考えてよい。任意の複素数の n ケの組 $(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n)$ について

$$\sum_{i,j} \varphi(a_i^* a_j) \lambda_j \overline{\lambda_i} = \sum_{i,j} \varphi((\lambda_i a_i)^* (\lambda_j a_j))$$

$$= \varphi((\Sigma \lambda_i a_i)^* (\Sigma \lambda_i a_i)) \geq 0$$

よって $[\varphi(a_i^* a_j)]$ は positive matrix である。

以下 linear functional の値をあらわすのに、かっこが多く見づらい時や duality が関連する時には $\varphi(a_i^* a_j)$ の形の代りに $\langle a_i^* a_j, \varphi \rangle$ の形のかき方を用いることにする。

前の CP-map でない例と上の Lemma を合せれば次の命題は予想されることである。

Proposition 1.3. $\tau : A \longrightarrow B$ positive map

このときA又はBが可換ならばτはcp-mapである。

証明. Aが可換なとき. $A = C_0(X)$ とおく. Bをヒルベルト空間H上に作用しているものとすると、Hのベクトルの組 $\{\xi_1, \cdots \xi_n\}$ に対してX上の regular measure μ がとれて

$$\sum_{i=1}^{n} (\tau(a)\xi_i, \xi_i) = \int_X a(t)\, d\mu$$

とかける。更に Radon-Nikodym の定理から、X上の積分可能関数 h_{ij} が各 (i,j) の組に対してとれて

$$(\tau(a)\xi_j, \xi_i) = \int_X a(t)\, h_{ij}(t)\, d\mu$$

とかける。任意の複素数の組 $(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n)$ について

$$\int a(t) \sum_{i,j} h_{ij}(t)\lambda_j \overline{\lambda_i}\, d\mu = \sum_{i,j} (\tau(a)\lambda_j\xi_j, \lambda_i\xi_i)$$

$$= (\tau(a)(\sum_i \lambda_i\xi_i), (\sum \lambda_i\xi_i))$$

となるから、$a \geqq 0$ の時上式は non-negative である。よって関数 $\sum_{i,j} h_{ij}\lambda_j\overline{\lambda_i}$ は a.e. で non-negative. この時の除外 null set は $(\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n)$ に関係するから通常の議論でそれをぬけると、結局 a.e. のXの点tについて、

$$\sum_{i,j} h_{ij}(t)\lambda_j\overline{\lambda_i} \geqq 0$$

が任意の複素数の組 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$ について言えることになる.

従って行列 $[h_{ij}(t)]$ は a.e. で正値行列となる. そこで $[a_{ij}] \in M_n(A)$ を正値行列とすると, Lemma 1.2 から

$$[a_{ij}(t)] \geq 0 \qquad \forall t \in X$$

$$\therefore \quad \sum_{i,j} a_{ij}(t) h_{ij}(t) \geq 0 \qquad \text{a.e.}$$

よって

$$\sum_{i,j} (\tau(a_{ij})\xi_j, \xi_i) = \sum_{i,j} \int_X a_{ij}(t) h_{ij}(t) d\mu$$

$$= \int_X \sum_{i,j} a_{ij}(t) h_{ij}(t) d\mu \geq 0$$

Q.E.D.

B が可換のとき. $B = C_0(X)$

$M_n(A)$ の positive matrix $[a_{ij}]$ をとると, Lemma 1.2 から

$$[\tau(a_{ij})(t)] \geq 0 \qquad \forall t \in X$$

ここで $M_n(B) = C_0(X, M_n)$ の元の positivity は M_n-valued 関数の positivity と同じだから(例えば[51]参照), 上から $[\tau(a_{ij})]$ は positive である. 即ち τ は CP-map.

CP-map の形は後の Stinespring の定理で完全に決定されるが, その前に重要な CP-map の1つとして次のことがある.

1.5

<u>Proposition 1.4.</u> B を C^*-環 A の C^* 部分環とする.
$\mathcal{E}: A \longrightarrow B$ norm 1 の projection
$\mathcal{E}$ は CP-map である.

(証明) 以下の証明では[43]の結果である. $\mathcal{E}$ が positive map ということと, module property $\mathcal{E}(axb) = a\mathcal{E}(x)b$ $(a, b \in B)$ を用いるが[43]の計算は A, B が unital であり, $\mathcal{E}(1_A) = 1_B$ となっていることが本質的であった. そこで $\mathcal{E}$ に仮定なしにこの状況がみちびけることを示しておこう. これは竹崎氏の注意による. $\mathcal{E}$ の second transpose $\tilde{\mathcal{E}}$ は A の enveloping von Neumann 環 $\tilde{A}$ からその von Neumann 部分環としての B の enveloping von Neumann 環 $\tilde{B}$ への norm 1 の projection である. よって $\tilde{\mathcal{E}}(1_{\tilde{A}}) = 1_{\tilde{B}}$ が成り立つことを示せば, $\tilde{\mathcal{E}}$ は positive で module property をもつことになり, $\mathcal{E}$ についての必要な性質が得られる. 従って A, B が ユニタルのとき $\mathcal{E}(1_A) = 1_B$ が成り立つことを示せばよい. $1_A = 1$, $1_B = e$ とおく.

$\mathcal{E}(1-e) = a + ib$, β; a の spectrum; として実数 λ をとると

$$\|\lambda e + \mathcal{E}(1-e)\| = \|\mathcal{E}(\lambda e + (1-e))\|$$
$$\leqq \|\lambda e + (1-e)\| = \max\{1, |\lambda|\}$$

一方 上式は

$$\|\lambda e + a + ib\| \geq \|\lambda e + a\| \geq |\lambda + \beta|$$

今 $\beta \neq 0$ として λ を β と同符号で $|\lambda|>1$ ととると、上式から

$$|\lambda| \geq |\lambda+\beta| = |\lambda|+|\beta| \qquad \text{矛盾}$$

よって $\beta=0$ i.e. $a=0$. 次に λe の代りに $i\lambda e$ を使えば同様にして $b=0$ が出てくる. 従って $\mathcal{E}(1)=e$.

命題の証明にもどる. $\mathcal{E}_n : M_n(A) \longrightarrow M_n(B)$

を考えると、$\mathcal{E}$ の性質から $\mathcal{E}_n$ は $*$-preserve で $M_n(B)$ について module property をもつ。x を $M_n(A)$ の positive な元とする.

$\forall a \in M_n(B)$, $\forall$ B の state φ, M_n の state ψ

について

$$\langle a^* \mathcal{E}_n(x) a,\ \varphi \otimes \psi \rangle = \langle \mathcal{E}_n(a^* x a),\ \varphi \otimes \psi \rangle$$
$$= \langle a^* x a,\ \varphi \circ \mathcal{E} \otimes \psi \rangle \geq 0.$$

ここで positive linear functional $a\varphi\otimes\psi_{a^*}$ を

$$\langle x,\ a\varphi\otimes\psi_{a^*} \rangle = \langle a^* x a,\ \varphi\otimes\psi \rangle$$

で定義したとき、その族

$$\{ a\varphi\otimes\psi_{a^*} \mid \forall a \in M_n(B),\ \forall \varphi,\ \psi \}$$

は $M_n(B)$ の order をきめるから. $\mathcal{E}_n(x) \geq 0$.

即ち $\mathcal{E}$ は cp-map である.

ヒルベルト空間 H 上の有界な線型作用素全体の環を $\mathcal{L}(H)$ とかく。次の Stinespring の定理は、CP-map を非可換の order に関する vector valued state という風に理解すれば、state の

GNS-表現の構成に対応するものである。そして証明もこの観点から考えれば非常に自然なものである。

定理1.5. τをC*環 A から$\mathcal{L}(H)$へのcp-mapとする。このときヒルベルト空間KとAのK上への表現π及びHよりKへの有界なlinear operator Vがあって

$$\tau(x) = V^* \pi(x) V$$

とかける。特にAがvon Neumann環でτがnormalな時には表現πをnormalな表現にとれる。

(証明) 先ずAがユニタルのときに示す。AとHの代数的テンソル積 $A \otimes H$において、$\alpha = \sum_i a_i \otimes \xi_i$, $\beta = \sum b_i \otimes \eta_i$ の内積を

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i,j} (\tau(b_i^* a_j)\xi_j, \eta_i)$$

と定義すると、τがcp-mapなことからこれはpositive semi-definite.

$$\mathcal{N} = \{\alpha \in A \otimes H \mid (\alpha, \alpha) = 0\}$$

とおくと上の積は $A \otimes H/\mathcal{N}$ の内積を定義する。そこでAのこの空間上への表現を

$$\pi(x)[\alpha] = [x a_1 \otimes \xi_1 + \cdots + x a_n \otimes \xi_n]$$

と定義する。$(\pi(x)\alpha, \alpha)$はA上のpositive linear functionalであるから

$$(\pi(x)\alpha, \pi(x)\alpha) = (\pi(x^*x)\alpha, \alpha) \leq \|x^*x\| (\pi(1)\alpha, \alpha)$$
$$= \|x\|^2 (\alpha, \alpha).$$

よって上のπの定義はwell-definedで且つ$\pi(x)$は$A\otimes H/\mathfrak{N}$上の有界な作用素となる。Kを$A\otimes H/\mathfrak{N}$の完備化とし$\pi(x)$をKまで拡大したものを又$\pi(x)$とかく。そこでvを

$$v ; \xi \in H \longrightarrow [1\otimes\xi] \in K$$

と定める。

$$\|v\xi\|^2 = (\tau(1)\xi, \xi) \leq \|\tau(1)\| \|\xi\|^2$$

からvは有界，又つくり方から

$$\tau(x) = v^*\pi(x)v \qquad \forall x \in A$$

ここでπのつくり方から，τが normal ならばπも又 von Neumann 環Aの normal な表現になる。

Aが nonunital の時にはτの second transpose $\tilde{\tau}$は

$$\tilde{\tau} = {}^{tt}\tau ; \hat{A} \longrightarrow \widehat{\mathcal{L}(H)} \quad (\sim \text{は enveloping von Neumann 環})$$

$\mathcal{L}(H)$は von Neumann 環だから，$\widehat{\mathcal{L}(H)}$から$\mathcal{L}(H)$へノルム1の projection εが存在する。$\varepsilon\circ\tilde{\tau}$は$\tilde{A}$から$\mathcal{L}(H)$へのCP−mapであり$\tilde{A}$はユニタルであるから前の場合をあてはめ，結果を$A$に制限すれば$\varepsilon\circ\tilde{\tau}|A = \tau$であるから求める形が得られる。

〈注1'〉 $K_0 = [\pi(A)vH]$とし$\pi(x)|K_0 = \pi_0(x)$とおくと，π_0はやはりAの表現で且つ　　$\tau(x) = v^*\pi_0(x)v$

よって一般に $K=K_0$ と考えてもよい。この意味で K は minimal であると考えられる。minimal な K は上の表現の中でユニタリ同値をのぞいて一意である。

〈注 2°〉τ が ユニタルな時は $\pi(1)=1$ であるから $v^*v=1$, ゆえに v は isometric map である。従って H と vH を同一視すれば、$H\subset K$ と考えてよく，p を H への projection とすると

$$\tau(x)=p\pi(x)|H$$

とかくことが出来る。この時上の形からわかるように τ について Schwarz の不等式

$$\tau(x)^*\tau(x)\leqq\tau(x^*x)$$

が成り立つ。

次の Arveson の定理[2] は positive functional の拡大定理に対応するものである。非可換な場合には、それは positive な operator valued state (map) の拡大定理にはならないことを注目すべきであろう。

定理 1.6. A を C^* 環, B をその C^* 部分環とし、τ を B より $\mathcal{L}(H)$ への CP-map とする。このとき A より $\mathcal{L}(H)$ への CP-map で τ の拡大になるものが存在する。

(証明) 前定理から A の表現 π on K_0 と $v: H\to K_0$ が存

在して $\quad \tau(x) = V^* \pi(x) V$

又 π に対して表現空間 $K \supset K_0$ と K 上への A の表現 $\hat{\pi}$ が存在して $\quad \hat{\pi}(x)|K_0 = \pi(x) \quad (x \in B)$

よって V を H から K への写像と考え

$$\hat{\tau}(x) = V^* \hat{\pi}(x) V \qquad (x \in A)$$

とおけば $\hat{\tau}$ は τ の cp-map としての拡大である.

注. Arveson [2] の元の形の結果は B が A の self-adjoint な部分空間の場合なので定理 1.5 が使えず非常に長い証明になっている.

Proposition 1.7. $\quad \tau : A \longrightarrow B \quad$ cp-map

A がユニタルのとき $\quad \|\tau\| = \|\tau(1)\|$

証明. $\tau(x) = V^* \pi(x) V$ とすると

$$\|\tau(x)\| \leq \|V^*\| \|\pi(x)\| \|V\| \leq \|x\| \|V^*\| \|V\|$$
$$= \|x\| \|V^* V\| = \|x\| \|\tau(1)\|$$

より $\|\tau\| \leq \|\tau(1)\|$. 逆の不等式は明らか.

C^* 環 A_1, A_2 について, それらの minimal な C^*-クロスノルムについての C^* テンソル積 (spacial な C^* テンソル積) を $A_1 \otimes_\alpha A_2$ とかくことにする. A_i が von Neumann 環の時, von Neumann 環としてのテンソル積を $A_1 \bar{\otimes} A_2$ とかく.

<u>Proposition 1.8</u> $\tau_i : A_i \longrightarrow B_i$ $(i=1,2)$ CP-map.
このとき CP-map $\tau_1 \otimes \tau_2 : A_1 \otimes_\alpha A_2 \longrightarrow B_1 \otimes_\alpha B_2$
が一意に存在して、$\tau_1 \otimes \tau_2 (a \otimes b) = \tau_1(a) \otimes \tau_2(b)$
又 A_i, B_i が von Neumann 環で τ_i が normal CP-map の時は $\tau_1 \otimes \tau_2$ は $A_1 \bar{\otimes} A_2$ より $B_1 \bar{\otimes} B_2$ への normal CP-map に一意に拡大出来る。

(証明) B_i を夫々ヒルベルト空間 H_i 上に作用しているとすると定理1.5から各 τ_i を表現する組 (K_i, π_i, v_i) ができる。π_i はここで $*$-homomorphism であるから

$$\exists\, \pi_1 \otimes \pi_2 : A_1 \otimes_\alpha A_2 \longrightarrow \mathcal{L}(K_1) \otimes_\alpha \mathcal{L}(K_2) \quad *\text{-homomorphism}$$

又 $\quad v_1 \otimes v_2 : H_1 \otimes_\sigma H_2 \longrightarrow K_1 \otimes_\sigma K_2$ bounded linear map.

そこで $\forall x \in A_1 \otimes_\alpha A_2$ について

$$\tau_1 \otimes \tau_2 (x) = (v_1 \otimes v_2)^* \pi_1 \otimes \pi_2 (x)\, v_1 \otimes v_2$$

とおけば形からこれは CP-map で更に条件をみたしている。
又 τ_i が normal の時は定理1.5より π_i が normal な表現になるから $\pi_1 \otimes \pi_2$ は $A_1 \bar{\otimes} A_2$ まで拡大出来、求める CP-map が上と同様に定義出来る。

注. A_i が von Neumann 環のとき、§3 でのべるように上の結果は更に一般化出来る。ここで minimal な C^*-クロスノルムの α-ノルムは uniform norm ではないので ([37]) 上のような結

果を一般の有界な線型写像に期待するわけにはいかない。上のような写像を product map と呼ぶことにする。

A, B をユニタルな C^* 環，$\tau : A \longrightarrow B$ をユニタル写像とする。

$$A_\tau^\ell = \{ a \in A \mid \tau(a^*a) = \tau(a)^*\tau(a) \}$$
$$A_\tau^r = \{ a \in A \mid \tau(aa^*) = \tau(a)\tau(a)^* \}$$

とおくと

<u>定理 1.9</u> ユニタルな CP-map $\tau : A \longrightarrow B$ については次のことが成り立つ

$$A_\tau^\ell = \{ a \in A \mid \tau(xa) = \tau(x)\tau(a) \quad \forall x \in A \}$$
$$A_\tau^r = \{ a \in A \mid \tau(ax) = \tau(a)\tau(x) \quad \forall x \in A \}$$

よって A_τ^ℓ，A_τ^r は又 A の closed な部分環になる。

これらを τ の multiplicative domain と呼ぶ。

(証明) 定理 1.5 の注 2' の表現を使い

$$\tau(x) = p\pi(x)|H \quad (H \subset K) \quad \text{と考える.}$$

$\forall a \in A_\tau^\ell$ について

$$p\pi(a^*a)|H = p\pi(a)^*p\pi(a)|H \quad \text{より}$$
$$p\pi(a)^*(1-p)\pi(a)|H = [(1-p)\pi(a)p]^*[(1-p)\pi(a)p]|H$$
$$= 0$$

従って $\quad (1-p)\pi(a)|H = 0$, i.e. $p\pi(a)|H = \pi(a)|H$

よって $\forall x \in A$ について

$$\tau(xa) = p\pi(xa)|H = p\pi(x)\pi(a)|H = p\pi(x)p\pi(a)|H$$
$$= \tau(x)\tau(a)$$

A_τ^r の元についても同様である.

系 1.9. ユニタル CP-map が C^*-homomorphism (自己共役な元について $\tau(a^2) = \tau(a)^2$) ならばそれは $*$-homomorphism である.

このときは A_τ^ℓ, A_τ^r がすべての A の自己共役元を含むから, A 全体になり, 従って τ は $*$-homomorphism になる.

定理 1.9 は実は 2-positive な map について成立する (Choi [10]) がここでは CP-map として定理 1.5 を用いた. この結果は lifting の問題等によく用いられる (例えば [1]).

ユニタルな作用素環の間の CP-map については, ユニタルな map とそうでない map の間の関係が重要な問題になるが値域が von Neumann 環の時には次のような形でとらえられる.

Proposition 1.10 A をユニタル C^* 環, R を H 上の von Neumann 環とする. $\tau : A \longrightarrow R$ CP-map.
このとき, $\tau(1) = b$ とおくと, A より R へのユニタルな CP-map

σが存在して

$$\tau(x) = b^{\frac{1}{2}} \sigma(x) b^{\frac{1}{2}}$$

《証明》 b が invertible なら $\sigma(x) = b^{-\frac{1}{2}} \tau(x) b^{-\frac{1}{2}}$ とおけばよい

というのが証明の元である。

A を K 上に作用しているとし、K の単位ベクトル ξ をとる。

e を b の support projection とし、整数 $n>0$ について

$$\sigma^n(x) = (b+\tfrac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} \tau(x) (b+\tfrac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} + (x\xi, \xi)(1-e)$$

とおく。σ^n は定義から CP-map であるがこれが各 x について強收束することを示そう。先ず

$$b(b+\tfrac{1}{n})^{-1} \longrightarrow e \ (s)$$

又 $a_n = e - b(b+\frac{1}{n})^{-1} \geq 0$ より $a_n^{1/2} \longrightarrow 0 \ (s)$

ここで

$$a_n^{1/2} \geq e - b^{\frac{1}{2}}(b+\tfrac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} \geq 0$$

から $\quad b^{\frac{1}{2}}(b+\frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}} \longrightarrow e \ (s)$

そこで A の元 a を $0 \leq a \leq 1$ ととる。$0 \leq \tau(a) \leq b$ よって

$$\tau(a)^{1/2} \leq b^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \quad \exists s \in \mathcal{L}(H) ; \quad \tau(a)^{1/2} = s b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}} s^*$$

これから $\{\tau(a)^{1/2}(b+\frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}}\}$, $\{(b+\frac{1}{n})^{-\frac{1}{2}}\tau(a)^{1/2}\}$ は共に有界な強收束列である。従って $\{\sigma^n(x)\}$ は又強收束列である。

$$\sigma(x) = \lim_n \sigma^n(x)$$

とおけばこれが求めるユニタル CP-map である。

主な文献

[2], [10], [14], [42], [43], [44]

§2 Algebra と dual の間の completely positive map

CP-map はふるくは algebra 間だけのものとして考えられていたが、Lance[35] にはじまる作用素環の dual(又はその subspace) と algebra 間の CP-map の考え方は作用素環(及びその dual)の order を理解する別な局面を開いたものとして、最近の nuclear 性, semidiscrete 性をめぐる議論の中で基本的な役割を果している. ここでは以上の§3への議論への準備も含せて結果をのべる. 先ず準備として C^*-テンソル積についての説明を少し用意しておこう(詳細は Effros-Lance [24]を参照)

A, B を C^*環, $A\otimes B$ をそれらの代数的なテンソル積とする. $A\otimes B$ 上のノルム $\|x\|_\beta$ で,

$$\|xy\|_\beta \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta \quad , \quad \|x^*x\|_\beta = \|x\|_\beta^2$$

となるものを C^*-ノルムという. $A\otimes B$ 上の任意の C^*-ノルムは単位元を付加した C^*環のテンソル積 $A_1\otimes B_1$ にまで拡大出来, その結果としてクロスノルムになることが知られている.

$A\otimes B$ の β-ノルムによる完備化した C^*環を $A\underset{\beta}{\otimes}B$ とかく.

$A\otimes B$ 上の C^*-ノルムには最大の C^*-ノルム(ν-ノルム, $A\underset{\nu}{\otimes}B$), と最小の C^*-ノルム(α-ノルム又は spatial C^*-ノルム, $A\underset{\alpha}{\otimes}B$)がある. f を $A\otimes B$ 上の positive linear functional ($f(x^*x)\geq 0$) とする.

$$\|f\|_\wedge = \sup_{\substack{\|a\|\leq 1 \\ \|b\|\leq 1}} |f(a\otimes b)| \quad (<\infty \text{ である})$$

とおく.

$$S(A\otimes B) \equiv \{ f \,;\, \text{positive functional}, \|f\|_\wedge = 1 \}$$

$A\otimes B$ の state space.

$$S^\circ(A\otimes B) \equiv \{ f \,;\, \text{"} \qquad , \|f\|_\wedge \leq 1 \}$$

ここで A, B がユニタルの時は

$$S(A\otimes B) = \{ f \,;\, \text{positive}, f(1\otimes 1) = 1 \}$$

である. f による $A\otimes B$ の GNS-表現を π_f とする. このとき最大の C^*-ノルム ν は次のように与えられる

$$\|x\|_\nu = \sup\{ \|\pi_f(x)\| \mid f \in S(A\otimes B) \}$$
$$= \sup\{ \|\pi_f(x)\| \mid f \in S^\circ(A\otimes B) \}$$

これに対して最小の C^*-ノルム α は次のような state の集合で与えられる

$$\|x\|_\alpha = \sup\{ \|\pi_f(x)\| \mid f \in S(A\otimes B) \cap A^*\otimes B^* \}$$

一般に ν-ノルムは α-ノルムよりも大きく, $A\otimes B$ にはその間のいくつもの C^*-ノルムが定義出来る. state の集合 $\Gamma \subset S(A\otimes B)$ について $\|x\|_\Gamma = \sup\{ \|\pi_f(x)\| \mid f \in \Gamma \}$ が $A\otimes B$ のノルムを定義するとき, Γ を separating family と呼ぶとすると, $A\otimes B$ 上の state の separating family Γ は C^*-ノルムを定め, 逆に $A\otimes B$ の C^*-ノルム β は, $\Gamma_\circ = S(A\otimes_\beta B)$ (C^* 環 $A\otimes_\beta B$ の state space を $S(A\otimes B)$ の subfamily と考える) という

separating family を定める。Γ と Γ_0 の関係は例えば Γ が convex で次の条件をみたすときには Γ_0 は Γ の弱 $*$-closure に含まれる。

$$\forall f \in \Gamma \quad \forall y \in A\otimes B \quad \exists g \in \Gamma \ ; \ f(y^* x y) = f(y^* y) g(x).$$

たとえば前にのべた $S(A\otimes B) \cap A^*\otimes B^*$ はこれをみたすから、$S(A\otimes_\alpha B)$ は上の集合の弱 $*$-closure に含まれる。これらの議論は $S(A\otimes B)$ の代りに $S^\circ(A\otimes B)$ (弱 $*$-コンパクト集合) をとっても同じことが言える。

C^*環 A が任意の C^*環 B について $A\otimes B$ の C^*-ノルムを一意に定めるとき、A を nuclear な C^*環という。前述の C^*-ノルムのきまり方から容易にわかるように、A が nuclear であるためには任意の C^*環 B について $S(A\otimes B)$ (又は $S^\circ(A\otimes B)$) が $S(A\otimes B)\cap A^*\otimes B^*$ (又は $S^\circ(A\otimes B)\cap A^*\otimes B^*$) の弱 $*$-closure に含まれることが必要十分である。又 $A\otimes_\beta B$ から $A\otimes_\alpha B$ への canonical な $*$-homomorphism は常に onto になるから、α-ノルム $= \nu$-ノルムということと、$A\otimes_\nu B \longrightarrow A\otimes_\alpha B$ という写像が 1 対 1 ということとは同値である。

A を C^*環とする。このとき $M_n(A^*)$ は自然な形で $M_n(A)^*$ と同一視出来るから、dual としての order をその中に考えることが出来る。E, F を C^*環、又はその dual か dual の closed subspace (例えば von Neumann 環の predual など) とする。このとき線型写像　$T \ ; \ E \longrightarrow F$

が completely positive ということを，上のような order をもとに定義する．§1 のときと違って今度は cp-map が有界であるとは限らない．しかし τ が有界であればその transpose map τ^* ; $F^* \longrightarrow E^*$ は τ が cp のとき cp-map になる．

C^*環 A, B の spatial なテンソル積 $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ において，各 $\varphi \in A^*$ について $R_\varphi(a \otimes b) = \varphi(a)b$ とおくと，R_φ は $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ より B へのノルム連続な写像を定義する．これを右 slice map と呼ぶ．同様に $\psi \in B^*$ については左 slice map L_ψ ; $A \underset{\alpha}{\otimes} B \longrightarrow A$ が定義出来この両者の間には

$$\langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle = \langle x, \varphi \otimes \psi \rangle$$

という関係がある．

A, B が von Neumann 環のときは，$\varphi \in A_*$ (predual) に対する slice map R_φ は σ-weakly continuous なので，更に $A \bar{\otimes} B$ より B への map に拡大出来る．これを又 R_φ とかき σ-weakly continuous な slice map と呼ぶ．このときは更に一般の $\varphi \in A^*$ についても R_φ ; $A \bar{\otimes} B \longrightarrow B$ が次のように定義出来る．

$$\langle R_\varphi(x), \psi \rangle = \langle L_\psi(x), \varphi \rangle \quad (\forall \psi \in B_*)$$

この map を generalized right slice map と呼ぶことにする．

次に $\forall a \in A$ について right dual slice map

$$r_a \;;\; (A \underset{\nu}{\otimes} B)^* \longrightarrow B^*$$

を $\langle b, r_a(f)\rangle = \langle a\otimes b, f\rangle \quad (b\in B)$

で定義する. r_a は有界な写像である.

<u>Proposition 2.1</u> すべての slice map および dual slice map はそれぞれ φ, a が positive のとき cp-map である. その逆も成り立つ

(証明) ノルム連続な slice map R_φ は

$$A\underset{\alpha}{\otimes}B \xrightarrow{\varphi\otimes 1} 1\otimes B \longrightarrow B$$

という写像の組合せであるから Lemma 1.2 と Proposition 1.8 より cp-map である. A, B が von Neumann 環のときは σ-weakly continuous な slice map についても, Proposition 1.8 の後半から同様な結論が出る. 又 generalized slice map については, 定義から $\varphi_\alpha \longrightarrow \varphi$ weak * in A^* のとき R_{φ_α} は R_φ に point-σ-weak 位相で収束するから, $\varphi\geq 0$ を normal functional φ_α で weak * 近似をとれば, R_{φ_α} が cp-map であることから R_φ が cp-map であることが言える.

最後に dual slice map については, $[f_{ij}]\in M_n((A\underset{v}{\otimes}B)^*)^+$ をとると, $\forall b_1, \cdots b_n \in B$ について

$$\sum_{i,j}\langle b_i^* b_j,\ r_a(f_{ij})\rangle = \sum_{i,j}\langle a\otimes b_i^* b_j,\ f_{ij}\rangle$$

$$= \sum_{i,j}\langle (a^{1/2}\otimes b_i)^*(a^{1/2}\otimes b_j),\ f_{ij}\rangle \geq 0$$

即ち　　$[r_a(f_{ij})] \in M_n(B^*)^+$
逆は明らかであろう.

さて slice map は $A \otimes_\alpha B$ (又は A, B が von Neumann 環のときは $A \bar{\otimes} B$) の元 x を固定すると

$$r(x) ; \varphi \in A^* \longrightarrow R_\varphi(x) \in B$$

という写像をひきおこし, dual slice map は各 $f \in (A \otimes_\nu B)^*$ について

$$R(f) ; a \in A \longrightarrow r_a(f) \in B^*$$

という写像をひきおこす. これらについての議論が Effros [21], Lance [35] における結果である. 先ず $R(f)$ については

<u>定理 2.2</u>　$f \in (A \otimes_\nu B)^* \longleftrightarrow R(f)$　という対応により $S^0(A \otimes B)$ は A より B^* への contractive な cp-map の集合へ1対1, isometric, onto に写される. この対応は更に $S^0(A \otimes B)$ に弱*位相, 後者の集合に point-弱*収束位相を考えると homeomorphism である.

A, B がユニタルのときは, $f \in S(A \otimes B)$ について $R(f)(1)$ は B の state になる (cp-state map ということがある).

《証明》 A, B の最大クロスノルム (γ-ノルム) による積 $A \otimes_\gamma B$ (Banach *-algebra) を考えると, $A \otimes_\nu B$ は $A \otimes_\gamma B$ の C^*-envelope 環である([39]). よってノルムを含めて次の同一視ができる.　$S^\circ(A \otimes_v B) = S^\circ(A \otimes_\gamma B)$

一方[28]の結果から $(A \otimes_\gamma B)^*$ は次と同一視出来る

$$(A \otimes_\gamma B)^* = \mathcal{L}(A, B^*) = Bil(A, B) \text{ (有界な bilinear form)}$$

よって $S^\circ(A \otimes B)$ の元に前にのべたノルム $\|f\|_\Lambda$ を考えたとき $f \in S^\circ(A \otimes B)$ と $R(f) \in \mathcal{L}(A, B^*)$ のノルムは同じである. 次に

$$f \geq 0 \iff f\left(\left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)^* \left(\sum_i a_i \otimes b_i\right)\right) \geq 0$$
$$(a_1, \cdots a_n \in A, \quad b_1, \cdots b_n \in B)$$

このとき上の f の値は

$$= \sum_{i,j} f(a_i^* a_j \otimes b_i^* b_j) = \sum_{i,j} R(f)(a_i^* a_j)(b_i^* b_j)$$

$$= \langle [b_i^* b_j], \ [R(f)(a_i^* a_j)] \rangle$$

従って $f \geq 0$ と $R(f)$ が cp-map であることとは同値である. 最後に $\tau : A \longrightarrow B^*$ を cp-contraction とすると

$$\langle \sum a_i \otimes b_i, f \rangle = \sum_i \langle b_i, \tau(a_i) \rangle$$

により τ は $A \otimes B$ 上の positive linear functional f を定義する. そして前にのべたことから

$$\|f\|_\Lambda = \|\tau\| \leq 1 \quad \text{i.e. } f \in S^\circ(A \otimes B)$$

対応の双連続性は定義から明らかである.

C^*環上の有界な linear functional は positive linear functional の linear combination でかけるから上の定理は $(A \underset{\nu}{\otimes} B)^*$ の $\mathcal{L}(A, B^*)$（又は $\mathcal{L}(B, A^*)$）の中への表現定理を示していることになる。ここで注目することは $(A \underset{\nu}{\otimes} B)^*$ の order が $\mathcal{L}(A, B^*)$ では positive map の order ではなく completely positive map の order（$\tau \geq \sigma \Leftrightarrow \tau - \sigma$ が CP-map）に写されることである。写像間のこの order を CP-order ということにする。

上と双対の結果になる algebra の表現定理を von Neumann テンソル積の場合に求めてみる。R, S をそれぞれ H および K 上の von Neumann 環とする。$x \in R \overline{\otimes} S$ に対して写像

$$\gamma(x) ; \varphi \in R_* \longrightarrow R_\varphi(x) \in S$$

を考えると

<u>定理 2.3</u>　$x \geq 0 \Longleftrightarrow \gamma(x)$ が CP-map

又上の対応で

$$(R \overline{\otimes} S)^+_1 = \{ x \in R \overline{\otimes} S \mid 0 \leq x \leq 1 \otimes 1 \}$$

と R_* より S への CP-map の集合

$$\{ \tau ; R_* \longrightarrow S \mid \text{CP-order で } 0 \leq \tau \leq \gamma(1 \otimes 1) \}$$

とは order isomorphic である。

これから $R \overline{\otimes} S$ は上のような CP-map で span された写像の空間として表現されることになる。

(証明) R, S を H, K 上に standard に表現されているものとする([30]参照, 又 [20 ; Chap III, §1 定理4])と $M_n(R)$, $M_n(S)$ は又 H^n, S^n 上で standard になるから

$$\forall \varphi \in M_n(R_*)^+ = M_n(R)_*^+, \quad \forall \psi \in M_n(S_*)^+ = M_n(S)_*^+$$

について

$$\exists \xi = (\xi_i) \in H^n, \ \eta = (\eta_i) \in K^n \ ; \ \varphi = \omega_\xi, \ \psi = \omega_\eta$$

とかける.(ω_ξ は $\mathcal{L}(H)$ 上の normal な vector state であるから正確には $\varphi = \omega_\xi|R$ とかくべきであるが特に違いを言う必要のある時をのぞいて上のかき方をとることにする. Slice map についても同様で R_{ω_ξ} は正確には $\mathcal{L}(H)\bar{\otimes}\mathcal{L}(K) = \mathcal{L}(H\otimes K)$ に作用しており, その R への制限が $R_{\omega_\xi}|R = R_\varphi$ である)

$\varphi = [\varphi_{ij}]$ とおくと $\varphi_{ij}(a) = (a\xi_j, \xi_i) = \omega_{\xi_j, \xi_i}(a)$

$\psi = [\psi_{ij}]$ 〃 $\psi_{ij}(b) = (b\eta_j, \eta_i) = \omega_{\eta_j, \eta_i}(b)$

このとき

$$\langle \gamma(x)_n(\varphi), \psi \rangle = \langle [\gamma(x)(\varphi_{ij})], \psi_{ij} \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \langle R_{\varphi_{ij}}(x), \psi_{ij} \rangle = \sum_{i,j} \langle x, \varphi_{ij}\otimes\psi_{ij} \rangle$$

$$= \sum_{i,j} (x\xi_j\otimes\eta_j, \xi_i\otimes\eta_i) = (x(\sum_i \xi_i\otimes\eta_i), (\sum_i \xi_i\otimes\eta_i))$$

よって

$$x \geq 0 \iff \gamma(x) \text{ が cp-map}$$

又 $\gamma(1\otimes 1 - x) = \gamma(1\otimes 1) - \gamma(x)$ から

$$0 \leqq x \leqq 1\otimes 1 \iff 0 \leqq \gamma(x) \leqq \gamma(1\otimes 1) \quad (\text{cp-order})$$

次に　$\tau : R_* \longrightarrow S$　を　$0 \leqq \tau \leqq \gamma(1\otimes 1)$　ととる。

$H\otimes K$ に product form を

$$[\sum \xi_i \otimes \eta_i, \sum \xi_i' \otimes \eta_i'] = \sum_{i,j} \langle \tau(\omega_{\xi_i,\xi_j'}), \omega_{\eta_i,\eta_j'} \rangle$$

と定めると、これは well-defined でかつ仮定から

$$0 \leqq \langle [\tau(\omega_{\xi_i,\xi_j})], [\omega_{\eta_i,\eta_j}] \rangle = \sum_{i,j} \langle \tau(\omega_{\xi_i,\xi_j}), \omega_{\eta_i,\eta_j} \rangle$$

$$\leqq \sum_{i,j} \langle \gamma(1\otimes 1)(\omega_{\xi_i,\xi_j}), \omega_{\eta_i,\eta_j} \rangle = \sum_{i,j} (\xi_i,\xi_j)(\eta_i,\eta_j)$$

$$= \| \sum_i \xi_i \otimes \eta_i \|^2$$

よって上の semi-inner product は元の内積(ノルム)について連続である。これを $H\otimes_\sigma K$ 上に拡大すると

$$\exists x_\tau \in \mathcal{L}(H\otimes_\sigma K) ;\ 0 \leqq x_\tau \leqq 1,\ [\xi, \kappa]_\tau = (x_\tau \xi, \kappa)$$
$$\forall \xi, \kappa \in H\otimes_\sigma K .$$

これから $\forall \xi \in H,\ \eta \in K$ について

$$[\xi\otimes\eta, \xi\otimes\eta]_\tau = \langle \tau(\omega_\xi), \omega_\eta \rangle = (\tau(\omega_\xi)\eta, \eta)$$
$$= (x_\tau(\xi\otimes\eta), (\xi\otimes\eta)) = (R_{\omega_\xi}(x_\tau)\eta, \eta)$$

従って（$\omega_\xi \in \mathcal{L}(H)_*$ と考えて）　$R_{\omega_\xi}(x_\tau) = \tau(\omega_\xi | R) \in S$　となる。これから

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(H)_* \text{ について } R_\varphi(x_\tau) \in S.$$

次に　$\forall \psi \in \mathcal{L}(K)_*$　について　$L_\psi(x_\tau) \in R$

を示すために上の τ が有界なことを示そう。$\varphi \in R_*$ について

$\varphi = |\varphi| v$ を φ の polar decomposition とし $|\varphi| = \omega_\xi | R$ とかくと $\varphi = \omega_{\xi, v^*\xi} | R$ で $\|\varphi\| = \||\varphi|\| = \|\xi\|^2 = \|\xi\|\|v^*\xi\|$ である.

$$\therefore \ \|\tau(\varphi)\| = \|\tau(\omega_{\xi, v^*\xi}|R)\| = \|R_{\omega_{\xi, v^*\xi}}(x_\tau)\|$$
$$\leqq \|\xi\|\|v^*\xi\| = \|\varphi\| \qquad \text{i.e. } \|\tau\| \leqq 1$$

これから $(R_*)^* = R$ を使って

$$\forall \psi \in S_* \ \exists \tau'(\psi) \in R \ ; \ \langle \tau'(\psi), \varphi \rangle = \langle \tau(\varphi), \psi \rangle \quad \forall \varphi \in R_*$$

よって vector state $\omega_\eta \in \mathcal{L}(K)_*$ について

$$(L_{\omega_\eta}(x_\tau)\xi, \xi) = (x_\tau(\xi \otimes \eta), \xi \otimes \eta)$$
$$= \langle \tau(\omega_\xi | R), \omega_\eta | S \rangle = \langle \tau'(\omega_\eta | S), \omega_\xi | R \rangle$$
$$= (\tau'(\omega_\eta | S)\xi, \xi)$$

従って

$$L_{\omega_\eta}(x_\tau) = \tau'(\omega_\eta | S) \in R \qquad \forall \eta \in K.$$

$\therefore$ $\forall \psi \in \mathcal{L}(K)_*$ について $L_\psi(x_\tau) \in R.$

従って [46; 定理2.1] から $x_\tau \in R \bar{\otimes} S.$

この x_τ について $\gamma(x_\tau) = \tau$ となることはつくり方より明らかであろう.

定理2.2, 2.3 においては共に左 slice map についての表現定理もあることは勿論である. ここで上の定理の $\gamma(x)$ は

generalized slice map により R^* から S への写像に拡大出来るが、定義から $\varphi \in R^* \longrightarrow R_\varphi(x) \in S$ という対応は Proposition 2.1 でのべたような連続性をもち、$M_n(R)_*$ は $M_n(R)^*$ の中で弱*稠密であるから、上の拡大もまた $x \geq 0$ のとき CP-map になる。

Enveloping von Neumann 環を考えれば定理から直ちに次が成り立つ。

系 2.3 spatial な C^*-テンソル積 $A \otimes_\alpha B$ の元 x について、対応

$\gamma(x) : \varphi \in A^* \longrightarrow R_\varphi(x) \in B$ （又は $\ell(x) : \psi \in B^* \rightarrow L_\psi(x) \in A$）

は $x \geq 0$ のとき CP-map である。逆も成り立つ

上の対応は A^* の単位球上では弱*ーノルム連続な写像になる。しかしこのような連続性をもつ CP-map では必ずしも $\tau = \gamma(x)$ （$x \in A \otimes_\alpha B$）とはかけないことも知られている（[54], [56]）。C^*ーテンソル積については CP-map の集合 $\{\gamma(x) \mid x \in A \otimes_\alpha B,\ x \geq 0\}$ を定める適当な characterization は得られていない（[49], [50] 参照）

φ を C^*環 A 上の positive linear functional とし

$C_\varphi = \{\psi \in A^* \mid 0 \leq \psi \leq \lambda\varphi \text{ for some } \lambda > 0\}$

$[\varphi] = C_\varphi$ の A^* での linear span

$\theta : \pi_\varphi(A)' \longrightarrow [\varphi]$ を次のように定義する.

$$\theta(\gamma)(a) = (\pi_\varphi(a)\gamma\xi_\varphi,\ \xi_\varphi) \quad (a \in A)$$

Proposition 2.4　上の θ は $\pi_\varphi(A)'$ と $[\varphi]$ の間の complete order isomorphism（任意の n について $M_n(\pi_\varphi(A)')$ と $M_n([\varphi])$ とが θ_n により order isomorphism のときこう呼ぶ）

（証明）[20; Lemma 1 p.48] から θ は $\pi_\varphi(A)'$ の positive part については C_φ への onto map である. 従って $\pi_\varphi(A)'$ を $[\varphi]$ へ onto にうつす。$\theta(\gamma) = 0$ とすると

$$0 = \theta(\gamma)(b^*a) = (\gamma\pi_\varphi(a)\xi_\varphi,\ \pi_\varphi(b)\xi_\varphi) \quad (a, b \in A)$$

であるから $\gamma = 0$.

次に $\forall \gamma_1, \cdots \gamma_n \in \pi_\varphi(A)'$, $\forall a_1, a_2, \cdots a_n \in A$ について

$$\langle [a_i^* a_j],\ [\theta(\gamma_i^*\gamma_j)] \rangle = \sum_{i,j} (\gamma_i^*\gamma_j\, \pi_\varphi(a_i^* a_j)\xi_\varphi,\ \xi_\varphi)$$

$$= \Big\| \sum_i \gamma_i \pi_\varphi(a_i)\xi_\varphi \Big\|^2 \geq 0$$

$\therefore$ Lemma 1.1 より θ は CP-map.

逆に $M_n([\varphi])$ の positive な元 $f = [f_{ij}]$ をとる.

$$\xi = (\pi_\varphi(a_1)\xi_\varphi,\ \cdots\ \pi_\varphi(a_n)\xi_\varphi) \in H_\varphi^n \quad \text{について}$$

$$((\theta^{-1})_n(f)\xi,\ \xi) = \sum_{i,j} (\theta^{-1}(f_{ij})\pi_\varphi(a_j)\xi_\varphi,\ \pi_\varphi(a_i)\xi_\varphi)$$

$$= \sum_{i,j} (\theta^{-1}(f_{ij})\pi_\varphi(a_i^* a_j)\xi_\varphi,\ \xi_\varphi) = \sum_{i,j} f_{ij}(a_i^* a_j)$$

$$= \langle [a_i^* a_j], [f_{ij}] \rangle \geq 0$$

従って $(\theta^{-1})_n(f) \geq 0$ i.e. θ^{-1} は CP-map である. 以上から θ は complete order isomorphism になる.

〈注〉 上の θ は定義から有界な写像であるが θ^{-1} は一般には有界にならない.

この節の最後として C^*環又はその dual (の subspace) と M_m との間の CP-map を決定してみる. C^*環 M_m の dual を M_m^* とすると M_m と M_m^* は

$$\varphi \in M_m^* \longleftrightarrow [\varphi(e_{ij})] \in M_m \quad (e_{ij} \text{ は matrix unit})$$

という対応で linear isomorphism になる. 今 $\sigma(m) ; M_m \to M_m^*$ をこの対応とすると, $\alpha = [\alpha_{ij}]$, $\beta = [\beta_{ij}]$ について

$$\langle \alpha, \sigma(m)(\beta) \rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \beta_{ij}$$

<u>Lemma 2.5</u> 上の $\sigma(m)$ は complete order isomorphism である.

(証明) $\sigma(m)_n ; M_n(M_m) \longrightarrow M_n(M_m^*)$

を考えると, $M_n(M_m)$ は C^*環として M_{mn} と同一視出来, 又 $M_n(M_m^*)$ の order はこれを C^*環 $M_n(M_m)$ の dual と考えての order であるから結局必要なことは任意の m について $\sigma(m)$

が order isomorphism であることになる．そこで M_m の正の元 α をとると，$\alpha=[\bar{\alpha}_i\alpha_j]$ と考えてよいから $\beta=[\bar{\beta}_i\beta_j]$ に対して

$$\langle\beta,\ \sigma(m)(\alpha)\rangle=\sum_{i,j}\bar{\alpha}_i\alpha_j\bar{\beta}_i\beta_j=\Big|\sum_i\alpha_i\beta_i\Big|^2\geq 0$$

即ち $\sigma(m)(\alpha)\geq 0$．又逆に $\sigma(m)(\alpha)\geq 0$ とすると任意の数の組 $\lambda_1,\cdots\lambda_m$ について

$$0\leq\langle[\bar{\lambda}_i\lambda_j],\ \sigma(m)(\alpha)\rangle=\sum_{i,j}\alpha_{ij}\bar{\lambda}_i\lambda_j$$

よって $\alpha=[\alpha_{ij}]$ は M_m の正の行列である．

E を C^*環又は dual (の subspace) とし，E^δ を E と duality をつくる相手側の部分空間（後者の時は C^*環）とする．このとき

$$\theta:M_m(E)\longrightarrow\mathcal{L}(M_m,E)\quad を$$
$$v=[v_{ij}]\longrightarrow\theta(v)(\alpha)=\sum_{i,j}\alpha_{ij}v_{ij}\ (\alpha=[\alpha_{ij}])$$

又

$$\Delta:M_m(E)\longrightarrow\mathcal{L}(E^\delta,M_m)\quad を$$
$$v=[v_{ij}]\longrightarrow\Delta(v)(\varphi)=[\varphi(v_{ij})]$$

と定義する．次の結果は定理 2.2, 2.3 の有限次元の場合にあたるものである．

定理 2.6　上の θ,Δ はそれぞれ $M_m(E)$ と，CP-map の order をつけたときの $\mathcal{L}(M_m,E)$，$\mathcal{L}(E^\delta,M_m)$ との間の order isomorphism である.

(証明) $v \in M_m(E)$ について E が C^*環のときには $M_m(E) = M_m \underset{\alpha}{\otimes} E$ と考えると

$$\theta(v)(\alpha) = R_{\sigma(m)(\alpha)}(v) = r(v)(\sigma(m)(\alpha)) \quad \text{i.e. } \theta(v) = r(v)\circ\sigma(m)$$

又 E が C^*環の dual 又はその subspace のときは (M_m は nuclear C^*環であるから) $M_m(E)$ は $M_m \underset{\alpha}{\otimes} E^\delta = M_m \underset{v}{\otimes} E^\delta$ の dual の subspace と考えられる. よって dual slice map により

$$\theta(v)^{(\alpha)} = r_\alpha(v) = R(v)(\alpha) \quad \text{i.e.} \quad \theta(v) = R(v)$$

従って定理 2.2, 系 2.3 と Lemma 2.5 から

$$v \geq 0 \iff \theta(v) \text{ は cp-map}$$

更に Δ については, $\varphi \in E^\delta$, $\alpha \in M_m$, $v \in M_m(E)$ について

$$\langle \theta(v)(\alpha), \varphi \rangle = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \langle v_{ij}, \varphi \rangle$$
$$= \langle [\alpha_{ij}], [\varphi(v_{ij})] \rangle = \langle \alpha, \Delta(v)(\varphi) \rangle$$

となるから ($\sigma(m)$ を省略してかいている)

$$\Delta(v) = \sigma(m)^{-1} \circ {}^t\theta(v)$$

である. よって Lemma 2.5 から

$$\Delta(v) \text{ が cp-map} \iff \theta(v) \text{ が cp-map}$$

表現が onto なのは明らかである. Q.E.D.

以上の証明では slice map の使用により埋没してしまったが elementary な証明を行なえば浮きあがってくる次の性質

は C^*環とその dual の性質を(特にその order)理解する上で大事なものである。

<u>Proposition 2.7</u> A を C^*環とし，$a = [a_{ij}] \in M_m(A)$
$\varphi = [\varphi_{ij}] \in M_m(A^*)$，又 $\beta = [\beta_{ij}]$ を (m,n) 型の数行列とする。

今 $a \geq 0$，$\varphi \geq 0$ とすると

$$\beta^* a \beta \geq 0 \quad \text{in } M_n(A), \qquad \beta^* \varphi \beta \geq 0 \quad \text{in } M_n(A^*)$$

(証明) A を H 上に作用しているものとし，β に対する H^n より H^m への作用素を t とすると，$\beta^* a \beta$ に対応する $\mathcal{L}(H^n)$ の中の元は $t^* a t$ である。よって $a \geq 0 \Longrightarrow \beta^* a \beta \geq 0$.

次に $b = [b_{p,q}] \in M_n(A)$ をとると，$b \geq 0$ のときは

$$\langle b, \beta^* \varphi \beta \rangle = \langle [b_{pq}], [\sum_{i,j} \bar{\beta}_{ip} \beta_{jp} \varphi_{ij}] \rangle$$

$$= \sum_{i,j,p,q} \bar{\beta}_{ip} \beta_{jq} \langle b_{p,q}, \varphi_{ij} \rangle = \langle [\sum_{p,q} \bar{\beta}_{ip} \beta_{jp} b_{pq}], [\varphi_{ij}] \rangle$$

$$= \langle \beta^{t*} b \beta^t, \varphi \rangle \geq 0 \qquad \therefore \beta^* \varphi \beta \geq 0.$$

(但し β^t は β の transpose 行列)

主な文献

[14], [21], [35], [47], [50], [54]

§3. Completely positive map による approximation property. von Neumann 環の場合.

この節では CP-map の立場から最近の semidiscrete von Neumann 環と injective von Neumann 環に関する結果,特にその global な同値性を詳述する. これらについてはここにのべるほかに Connes [12] の hyperfinite factor としての injective factor の characterization をはじめ Wassermann [54] や Effros-Lance [24] の中のテンソル積についての結果等事柄としては大事なものが沢山あるがここでは completely positive という概念がどう関係してくるかということを中心にのべることにする.

von Neumann 環の injectivity は作用素環としては Connes [13] にときあかされているように群の amenability と密接な関連をもっているがもう一つの背景として Banach 空間での議論がある. それを少し説明してみよう. Banach 空間 E がそれを含む Banach 空間 F より常に(Banach 空間としての)ノルム 1 の projection をもつとき E を injective な Banach 空間という. このような Banach 空間は最初 Goodner [26] によって研究され, real な Banach 空間についてはその charaterization (Stonean 空間上の連続関数環(実数値)と同型) が得られていた. 同じ頃

Nachbin [34] によってこの空間は extension property をもつ空間 ($\forall G \supset F$ と F から E への bounded linear operator T に対して T の G への拡大 $\hat{T}$ がつくれて $\|\hat{T}\| = \|T\|$ と出来る) としてとらえ同様な結果が求められている。その後それらの結果は real Banach space については簡単な証明 ([33]) が得られる迄になったが complex Banach space に関する characterization は Hasumi [29] によって初めて解決された。一方これとは別に Grothendieck [28] によってはじめられた approximation property をもつ Banach space の議論はその後長く進展せず、approximation をもたない Banach space の存在は大きな問題となっていたが Enflo [57] によりその存在が示された。Grothendieck の結果の中の一つとして次のことがある。

E approximation property をもつ

$\rightleftarrows \forall F$; $E \underset{\gamma}{\otimes} F \longrightarrow E \underset{\lambda}{\otimes} F$ という canonical map が 1 対 1 (但し λ は最小のクロスノルム)

injective な Banach space は前見の charaterization により Stonean space 上の連続関数環と同型になるから勿論 approximation property をもっている。ここで E が approximation property をもつというのは、E の任意のコンパクト集合上で単位作用素が有限次作用素で一様近似出来ることをいう。この有限次作用素をすべて $\|T\| \leq 1$ ととれるとき、metrical approximation propertyをみたさない．

これらの事柄の作用素環的なformulationはGoodner typeのinjectivityは羽毛田－富山[32]，富山[46]にそのままもちこされ，Nachbin typeのextension propertyは写像をcp-mapにすることにより定理1.6が類似になることが判明して以来，Lance，Choi，Effros更にConnesと議論が発展していった．Connes[12]のinjective factorのcharacterizationはその意味では荷見の結果の非可換版である．一方Banach空間のテンソル積でのγ，λ－ノルムに対してC^*テンソル積でも最大最小なν，α－ノルムが存在することを考え，C^*テンソル積においては§2でものべたようにcanonical map $A\otimes_\nu B \longrightarrow A\otimes_\alpha B$が1対1ということと$\alpha$－ノルム＝$\nu$－ノルムということが同値であることを思えば，$C^*$環の或る種のapproximation propertyとnuclearityが同値になるだろうということも予想され，それは又injectivityとも関係することが推察される．次節でのべる結果が丁度その部分にあたることになるが，問題をvon Neumann環にするとき，やはりある種のテンソル積を等しくするnuclearityとvon Neumann環としての位相を考えたapproximation propertyの同値性が問題として提起されることになる．そこでとりあげられたのがnormalな有限次のcp-mapの近似というLance－

Effros [24] における semidiscrete von Neumann 環の議論である.

R を H 上の von Neumann 環とする. $\mathcal{L}(H)$ より R へノルム 1 の projection があるとき R を injective な von Neumann 環という.

定理 1.6 から (Proposition 1.4 も合せて) 次のことは容易にわかる.

Proposition 3.1 次は同値である

1) R は H 上の injective von Neumann 環である

2) $\forall\, C^*$ 環 $A \supset R$ $\exists\, \varepsilon : A \longrightarrow R$ ノルム 1 の projection

3) $\forall\, C^*$-環 $A \supset B$ C^* 部分環

$\tau : B \longrightarrow R$ cp-map

$\exists\, \hat{\tau} : A \longrightarrow R$ cp-map の τ の拡大

Proposition 3.2. R_1, R_2 をそれぞれ H と K 上の von Neumann 環, S_1, S_2 をその von Neumann 部分環とする.

$\varepsilon_0 \doteqdot \varepsilon_1 \otimes \varepsilon_2 : R_1 \underset{\alpha}{\otimes} R_2 \longrightarrow S_1 \underset{\alpha}{\otimes} S_2$ product projection

このとき ε_0 は $R_1 \bar{\otimes} R_2$ より $S_1 \bar{\otimes} S_2$ へのノルム 1 の projection に拡大出来る

(証明) $\{e_i \mid i \in I\}$ を $\mathcal{L}(K)$ の中の orthogonal な minimal projection で $\sum_i e_i = 1$ とする. $\tilde{e}_i = 1 \otimes e_i$

J : finite subset $\subset I$ について

$\widetilde{e}_J = 1 \otimes \sum_{i \in J} e_i = 1 \otimes e_J$ とおくと

$\widehat{e}_J (R_1 \overline{\otimes} \mathcal{L}(K)) \widehat{e}_J = R_1 \overline{\otimes} e_J \mathcal{L}(K) e_J = R_1 \underset{\alpha}{\otimes} \mathcal{L}(e_J K)$

そこで

$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_1 \otimes 1_J \ ; \ R_1 \underset{\alpha}{\otimes} \mathcal{L}(e_J K) \longrightarrow S_1 \underset{\alpha}{\otimes} \mathcal{L}(e_J K)$ とおく

$$\mathcal{E}_J^1 (x) \equiv \mathcal{E}_J (\widehat{e}_J x \widetilde{e}_J) \qquad (x \in R_1 \overline{\otimes} \mathcal{L}(K))$$

ここで x を固定すると $\{ \mathcal{E}_J^1 (x) \mid J \subset I \}$ は bounded net

よって

$$\mathcal{E}^1 (x) \equiv \operatorname{Lim}_J \mathcal{E}_J^1 (x) \quad \text{(operator Banach limit)}$$

このとき operator Banach limit の性質（例参照）から

$$\mathcal{E}^1 (x) \in S_1 \overline{\otimes} \mathcal{L}(K) \quad 且つ \quad \| \mathcal{E}^1 (x) \| \leq \| x \|$$

今 $x \in S_1 \overline{\otimes} \mathcal{L}(K)$ のときは

$$x = \sigma\text{-weak limit of } \widetilde{e}_J x \widetilde{e}_J$$

であるから

$$\mathcal{E}^1 (x) = \operatorname{Lim}_J \mathcal{E}_J^1 (x) = \operatorname{Lim}_J \widehat{e}_J x \widehat{e}_J = \lim_J \widetilde{e}_J x \widetilde{e}_J = x$$

i.e. $\mathcal{E}^1 (x)$ は $S_1 \overline{\otimes} \mathcal{L}(K)$ へのノルム1の projection である。

つくり方から

$$\mathcal{E}^1 (a \otimes b) = \mathcal{E}_1 (a) \otimes b \qquad a \in R_1 , \ b \in \mathcal{L}(K)$$

同様にして $\mathcal{L}(H) \overline{\otimes} R_2$ から $\mathcal{L}(H) \overline{\otimes} S_2$ へのノルム1の projection $\mathcal{E}^2$ が定義出来る。

$$\mathcal{E}(x) \equiv \mathcal{E}^1 \cdot \mathcal{E}^2 (x) \qquad (x \in R_1 \overline{\otimes} R_2)$$

さて $a \in S_2'$ について $1 \otimes a \in S_1 \overline{\otimes} \mathcal{L}(K)$ だから

projection の module property から

$$1\otimes a\,\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}^1(1\otimes a\,\mathcal{E}^2(x)) = \mathcal{E}^1(\mathcal{E}^2(x)1\otimes a) = \mathcal{E}(x)1\otimes a$$

$$\therefore \quad \mathcal{E}(x) \in S_1 \overline{\otimes} \mathcal{L}(K) \cap \mathcal{L}(H) \overline{\otimes} S_2 = S_1 \overline{\otimes} S_2$$

よって $\mathcal{E}(x)$ は $S_1 \overline{\otimes} S_2$ へのノルム 1 の projection であり、つくり方から

$$\mathcal{E}(a\otimes b) = \mathcal{E}_1(a)\otimes \mathcal{E}_2(b) \quad (a\in R_1,\ b\in R_2)$$

〈注〉 上の結果は一般の CP-map にまで拡張することが出来る.

<u>定理 3.3</u> Injectivity は algebraic invariant である. 又 R が injective なことと R' が injective なこととは同値である.

(証明) von Neumann 環 R (on H) と S (on K) とが同型なときは同型対応の分解定理[20; 定理 3, p. 55] から適当なヒルベルト空間 K_0 をとって $R\otimes 1$ on $H\underset{\sigma}{\otimes}K_0$ と $S\otimes 1$ on $K\underset{\sigma}{\otimes}K_0$ とは spacial に同型になるように出来る. よって定理の前半を示すには ampliation について

$$R \text{ injective} \rightleftarrows R\otimes 1 \text{ が injective } (\text{on } H\underset{\sigma}{\otimes}K)$$

を示せば十分である.

$\mathcal{E}_0 ; \mathcal{L}(H) \longrightarrow R$ ノルム 1 の projection

$\varphi ;$ normal state on $\mathcal{L}(K)$ として

$$\varepsilon_1 : \mathcal{L}(H \underset{\sigma}{\otimes} K) \xrightarrow[L_\varphi]{} \mathcal{L}(H) \xrightarrow{\varepsilon_0} R \longrightarrow R \otimes 1$$

はノルム1の projection. 又逆に projection $\varepsilon_1 ; \mathcal{L}(H \underset{\sigma}{\otimes} K) \longrightarrow R \otimes 1$ があったとすると

$$\varepsilon_0 ; \mathcal{L}(H) \longrightarrow \mathcal{L}(H) \otimes 1 \xrightarrow{\varepsilon_1} R \otimes 1 \longrightarrow R$$

はノルム1の projection. 従って前者は成り立つ.

次に今 R' が injective であるとすると, Proposition 3.2 から $(R \otimes 1)' = R' \overline{\otimes} \mathcal{L}(K)$ も又 injective である. 又後者が成り立つとすると

$$\exists\ \varepsilon_1 ; \mathcal{L}(H' \underset{\sigma}{\otimes} K) \longrightarrow R' \overline{\otimes} \mathcal{L}(K) \quad \text{projection}$$

このとき

$$\varepsilon_0 ; \mathcal{L}(H) \longrightarrow \mathcal{L}(H) \otimes 1 \xrightarrow{\varepsilon_1} R' \otimes \mathcal{L}(K) \xrightarrow{L_\varphi} R'$$

はノルム1の projection.

以上から前と同じ理由で R' が injective であるという R の性質も又 algebraic invariant である. π を R の standard 表現とし K を表現空間 J をその中の canonical な involution とする. i.e. $J^2 = 1$, $J \pi(R) J = \pi(R)'$.

今 ε を $\mathcal{L}(K)$ より $\pi(R)$ への projection とすると

$$\varepsilon'(x) = J \varepsilon(J x J) J \qquad x \in \mathcal{L}(K)$$

は $\pi(R)'$ へのノルム1の projection である. 従って前の議論と合せて

$$R \ \text{injective} \iff \pi(R) \ \text{が injective}$$

$\Longleftrightarrow \pi(R)'$ が injective $\Longleftrightarrow R'$ が injective

系 3.3. I型の von Neumann 環は injective である.

(証明) I型の von Neumann 環は commutant が可換である環と同型になり 可換な von Neumann 環は前見の結果で (Banach空間としても) injective である.

Proposition 3.4 $\{R_\alpha\}$ を injective な von Neumann 環の増加列とすると. $R = (R_\alpha)''$ は又 injective である

(証明) $R' = \cap R_\alpha'$ $\{R_\alpha'\}$ は減少列. そこで $\mathcal{E}_\alpha$ を R_α' への projection とし

$$\mathcal{E}(x) \equiv \mathop{\mathrm{Lim}}_{\alpha} \mathcal{E}_\alpha(x) \quad (\text{operator Banach limit})$$

とおくと,

$\alpha \geq \alpha_0$ のとき $\mathcal{E}_\alpha(x) \in R_{\alpha_0}' \Longrightarrow \mathcal{E}(x) \in R_{\alpha_0}'$

よって $\mathcal{E}(x) \in R'$. 又 $\mathcal{E}$ は明らかにノルム1の projection.

以上から hyperfinite factor は injective であることがわかる. この逆が Connes[12] の主要結果である.

その他以下の議論で容易にわかるような結果 (例えば $\{R_\alpha\}$ injective $\Longleftrightarrow \sum_\alpha R_\alpha$ injective など…) は証明なしに用いることにする.

von Neumann環RにおいてRの単位作用素が有限次のユニタルσ-weakly continuousなCP-mapでpoint σ-weak convergence topologyで近似出来るとき、Rをsemidiscreteという。

Lemma 3.5 可換なvon Neumann環, $\mathcal{L}(H)$はsemidiscrete

(証明) $R = C(\Omega)$ とする。

Δ ; Ωのdisjoint clopen setへの分解 $\{S_j\}$

χ_i ; S_iの特性関数

μ_i ; $\mathrm{supp}\,\mu_i = S_i$ となるnormal probability measure

そこで

$$\tau_\Delta(x) = \sum_i \mu_i(x)\chi_i \quad (x \in R)$$

とおくとτ_ΔはRから有限次元の部分環へのnormalな射影、つくり方から

$$\tau_\Delta \longrightarrow 1 \quad (\text{point } \sigma\text{-weak conv. topology})$$

従ってRはsemidiscrete.

次に$\mathcal{L}(H)$のときは

$\{e_i \mid i \in I\}$ orthogonal minimal projection $\sum_i e_i = 1$

$e_J = \sum_{i \in J} e_i$; J finite subset $\subset I$

$e_J x e_J \longrightarrow x$ σ-weakly $(\forall x \in \mathcal{L}(H))$

そこでnormal state φを1つとり

$$\tau_J(x) = e_J x e_J + \varphi(x)(1-e_J)$$

とおけば τ_J はユニタルな有限次 normal cp-map でつくり方から

$$\tau_J(x) \longrightarrow x \qquad \sigma\text{-weakly}$$

semidiscreteness についてはそれが algebraic invariant なことと、R と S が semidiscrete なとき $R\otimes S$ が又 semidiscrete なことは Proposition 1.8 から容易にわかるから上の Lemma と合せて I型の von Neumann環は semidiscrete なことがわかる。又定理3.3と同様にして R が semidiscrete なことと R' が semidiscrete なことが同値であることが言える。

R について更に次の性質(A)を考える

(A) $\eta : R\otimes R' \longrightarrow \mathcal{L}(H)$

$\eta(a\otimes b) = ab$ と定めると

η は α-ノルムで連続である. i.e. η は $R\otimes_\alpha R'$ から $\mathcal{L}(H)$ への $*$-homomorphism に拡大出来る.

そこでこの節の目標とするのは次の結果である.

$\boxed{\text{定理}}$ 任意の von Neumann 環 R について次のことは同値である.

(1) R は injective である

(2) R は性質 (A) をもつ

(3) R は semidiscrete である.

この結果は Effros-Lance [24] によって (2) $\Longleftrightarrow$ (3) が示され, 又 (2) $\Longrightarrow$ (1) は容易に証明出来る. そして一番困難な (1) $\Rightarrow$ (2) (従って injectivity と semidiscrete 性の同値) については可分なヒルベルト空間上の factor については Connes [12] をもとに III 型の factor は他の彼の結果と合せて implication が言えていた. その後 Choi-Effros [16] は reduction theory を用いて可分な空間上の global な von Neumann 環にそれを拡張し, 更にそれを用いることにより一般の von Neumann 環でも両者の同値性が成り立つことを示している ([17]). ここでは元の Connes の証明を改良した Wassermann [55] により, 一般の場合の直接の証明をのべる. 定理の証明は非常に長いものなので各段階の Lemma をつみ重ねた形でのべていく. ここで R が factor の時にはよく知られているように R と R' とで生成された C^* 環 $C^*(R, R')$ は C^* テンソル積と考えられるから, 性質 (A) はこのテンソル積が spacial なテンソル積と一致するという一種の (commutant に対する) R の nuclearity をあらわしていることを注意しておく. 又これと関連して次のことを確認してお

ころ. C^*環 A, B について Γ を $S(A\otimes B)$ の中の separating family, Γ による $A\otimes B$ のノルムを $\|x\|_\Gamma$ とする.

<u>Lemma 3.6</u> Γ の弱$*$ closure が $S(A\underset{\Gamma}{\otimes}B)$ を含むとする.
このとき $\|x\|_\Gamma$ が $\|x\|_\alpha$ と一致するための条件は $\forall f\in\Gamma$ について $R(f): A\longrightarrow B^*$ (又は $L(f): B\longrightarrow A^*$) がノルム1の有限次 cp-map で point-弱$*$収束位相で近似出来ることである. ($S^\circ(A\otimes B)$ の族の時はノルム1でなく contraction)

(証明) $R(f)$ がノルム1の有限次 cp-map であるということと $f\in S(A\otimes B)\cap A^*\otimes B^*$ が同値であることは容易にわかるから定理2.2と Γ の条件から上のことが canonical map

$$A\underset{\Gamma}{\otimes}B \longrightarrow A\underset{\alpha}{\otimes}B$$

が1対1となるための必要十分条件である.

<u>Lemma 3.7.</u> semidiscrete $\Longrightarrow$ (A)

(証明) $\Gamma=\{f\in S(R\otimes R') \mid \ell_b(f)\in R_* \quad \forall b\in\pi(R)'\}$

とおくと, Γ は convex set でかつ,

$$\forall f\in\Gamma \quad \forall y\in R\otimes R' \quad \exists g\in\Gamma;\ f(y^*xy)=f(y^*y)\,g(x)$$

従って§2のはじめでのべたように

$$\Gamma \text{ の弱}* \text{ closure} = S(R\underset{\Gamma}{\otimes}R')$$

Γ の定義から $\quad \|x\|_\Gamma \geq \|\eta(x)\| \quad (x\in R\otimes R')$

そこで $f \in \Gamma$ について $L(f); R' \longrightarrow R_*$ を考えるとRはsemidiscreteだからR_*の単位作用素は有限次CP-mapで各点で$\sigma(R_*, R)$位相で近似出来ているので、その net を$\{\tau_\alpha^*\}$とすると $L(f)$ は有限次CP-map $\tau_\alpha^* \circ L(f)$ により各点ごとに$\sigma(R_*, R)$位相で近似出来る。従って Lemma から

$$\|x\|_\Gamma = \|x\|_\alpha \quad となる.$$

<u>Lemma 3.8</u> 性質(A) $\Longrightarrow$ injective

(証明) η をα-ノルムで連続とする。$R \underset{\alpha}{\otimes} R'$ は $R \underset{\alpha}{\otimes} \mathcal{L}(H)$ のC^*部分環とみれるから、表現ηを拡大して

$$\exists \pi ; R \underset{\alpha}{\otimes} \mathcal{L}(H) \text{ の } K (\supset H) \text{ 上への表現}$$

$$\pi(x)|H = \eta(x) \qquad x \in R \underset{\alpha}{\otimes} R'$$

そこで projection $p ; K \rightarrow H$ をとり $x \in \mathcal{L}(H)$ について

$$\mathcal{E}(x) = p\pi(1 \otimes x)|H \qquad \text{とおく.}$$

ここで $\mathcal{E}(x)$ はつくり方から $\forall a \in R$ について可換であるから $\mathcal{E}(x) \in R'$. 又明らかに $\mathcal{E}(b) = b$ ($\forall b \in R'$). 従って R' は injective であり、定理3.3から R も injectiveになる。

<u>Lemma 3.9</u> 性質(A) $\Longrightarrow$ semidiscrete

(証明) H の単位ベクトルξをとり、$f = \omega_\xi \circ \eta$ とおくと f は $R \underset{\alpha}{\otimes} R'$ の state である。

$T = L(f)\,;\ R' \longrightarrow R_*$ 　f による cp-state map

$\varphi = T(1)$ とおく。　$\varphi(a) = \omega_\xi \circ \eta(a \otimes 1) = (a\xi, \xi)$

$e' = [R\xi]$ への projection ; e' は R' の projection で $\pi_\varphi(R)$ は Re' と spacial に同一視出来る。このとき proposition 2.4 から

$$\theta_\varphi^{-1} \circ T\,;\ R' \longrightarrow e'R'e' \qquad \text{cp-map.}$$

又 $\forall b \in R$ について

$$T(b)(a) = f(a \otimes b) = (ab\xi, \xi) = (ae'be'\xi, \xi)$$

又 $\pi_\varphi(R)'$ と $e'R'e'$, $\pi_\varphi(R)$ と Re' の同一視で

$$\gamma = \theta_\varphi^{-1} \circ T(b) \quad \text{i.e.} \quad \theta_\varphi(\gamma) = T(b) \text{ のとき}$$

$$T(b)(a) = (a\gamma\xi, \xi) \quad (a \in R) \quad \text{であるから}$$

$$\gamma = \theta_\varphi^{-1} \circ T(b) = e'be'.$$

さて T は Lemma 3.6 から有限次 cp-state map の列 $\{T_\gamma\}$ で近似出来るが $S(R \otimes_\alpha R')$ の中で $S(R \otimes_\alpha R') \cap R_* \otimes (R')_*$ が弱* dense なことから、$T_\gamma(R') \subset R_*$ と考えてよいが更に

$$\boxed{\text{任意の } \gamma \text{ について} \quad T_\gamma(1) = \varphi}$$

と調整出来ることがこのちくの Lemma でわかる。$\phi_\gamma = \theta_\varphi^{-1} \circ T_\gamma$ とおく。ϕ_γ が normal でかつ各点ごとに $\theta_\varphi^{-1} \circ T$ に σ-weak に収束することを示そう。$\{b_\alpha\}$ ($\|b_\alpha\| \leq 1$) を R' の net で

$b_\alpha \longrightarrow 0$ (σ-weak) とすると、$\forall a_1, a_2 \in R$ について

T_γ は $S(R \otimes_\alpha R') \cap R_* \otimes (R')_*$ からつくったから

$$(\phi_\gamma(b_\alpha)\pi_\varphi(a_1)\xi,\ \pi_\varphi(a_2)\xi) = T_\gamma(b_\alpha)(a_2^* a_1) \longrightarrow 0$$

ξはe'Hでcyclicで $\|\phi_\gamma(b_\alpha)\| \leq 1$ であるから以上から

$$\phi_\gamma(b_\alpha) \longrightarrow 0 \quad (\sigma\text{-weak})$$

次に $b \in R'$, $a_1, a_2 \in R$ について

$$((\phi_\gamma(b) - b)\pi_\varphi(a_1)\xi, \pi_\varphi(a_2)\xi) = \langle a_2^* \rho, T_\gamma(b) - T(b) \rangle$$

は0に収束する. $\|\phi_\gamma(b) - b\| \leq 2\|b\|$ であるから上のことは $\phi_\gamma(b)$ が $e'be' = \theta_\varphi^{-1} \circ T(b)$ に σ-weakに収束することを示している. そこで $e'R'e'$ の normal state ψ をとり,

$$\Phi_\gamma(s) = \theta_\varphi^{-1} \circ T_\gamma(s + \psi(s)(1-e')) \quad (s \in e'R'e')$$

とおけば, Φ_γ はユニタル有限次 normal CP-map で上のことから

$$\Phi_\gamma(s) \longrightarrow \theta_\varphi^{-1} \circ T(s + \psi(s)(1-e')) = s \quad \sigma\text{-weak}$$

従って $e'R'e'$ は semidiscrete である. よって Re' は semi-discrete になる. 一般に $\{R_\alpha\}$ が semidiscrete な von Neumann 環の族とするときその direct sum $\sum_\alpha R_\alpha$ が又 semidiscrete なことは定義からほとんど明らかであるから, 上のことをつみ重ねてRは semidiscrete になる.

上の枠の調整が可能なことを以下に示す. 先ずRを R_* の dualと考えれば T_γ はTに各点ごとに弱位相 $\sigma(R_*, R)$ で収束するから, それらの convex combination は各点ごとに R_* でTにノルム収束する. T_γ の convex combination は又有

限次の σ-weak − weak * 連続な cp − state map である。これらを normal な cp − state map ということにすると結局

$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall b_1 = 1, b_2, \cdots b_n \in R'$ について

$\exists \tau : R' \longrightarrow R_*$ 有限次 normal cp − state map

$$\| \tau(b_i) - T(b_i) \| < \varepsilon$$

と仮定してよいことになる。この仮定の下で

<u>Lemma 3.10</u> $\exists \tau' ; R \longrightarrow R_*$ 有限次 normal cp − map

$$\| \tau' \| < 1 + \varepsilon \qquad \tau'(1) \geq T(1)$$

かつ $\| \tau'(b_i) - T(b_i) \| < \varepsilon$

(証明) $\| b_i \| \leq 1$ としてよい。仮定から

$\exists \tau_1$: normal な有限次 cp − state map ; $\| \tau_1(b_i) - T(b_i) \| < \varepsilon/2$

$\tau_1(1) - T(1) = \varphi^+ - \varphi^-$ (positive part への分解)

とすると

$$\| \tau_1(1) - T(1) \| = \| \varphi^+ \| + \| \varphi^- \| < \varepsilon/2$$

ψ を R' 上の normal state として $\tau_2 : R' \longrightarrow R_*$ を

$$\tau_2(x)(a) = \varphi^-(a) \psi(x)$$

と定める。そこで $\tau' = \tau_1 + \tau_2$ とおくと

τ' は有限次の normal cp − map で

$$\tau'(1) = \tau_1(1) + \tau_2(1) = T(1) + \varphi^+ \geq T(1)$$

又つくり方から他の条件もみたしている。

Lemma 3.11　Lemma 3.8 の状況で $T_r(1) = T(1) = \varphi$ ととれる.

(証明) $\delta > 0$ を $\delta + \delta^{1/2}(2 + \delta^{1/2}) < \varepsilon$ ととり, この δ について前の Lemma の τ' をつくる. 境の定理 [4; 定理 1.24.3] から $\tau'(1) = f$ とおくと

$$\exists\, t \in R \,;\, 0 \leq t \leq 1, \quad \varphi(x) = f(txt) \quad (x \in R)$$

そこで　$\eta = \pi_f(t)\xi_f \in H_f$　とおくと

$$\varphi(x) = (\pi_f(x)\eta, \eta)$$

又　$(\eta, \xi_f) = (\pi_f(t)\xi_f, \xi_f) \geqq (\pi_f(t^2)\xi_f, \xi_f)$

$$= \|\eta\|^2 = \varphi(1) = 1$$

$\therefore$　$\|\eta - \xi_f\|^2 = \|\xi_f\|^2 + \|\eta\|^2 - 2(\eta, \xi_f)$

$$\leqq f(1) + 1 - 2 < 1 + \delta - 1 = \delta$$

そこで　$\tau : R' \longrightarrow R_*$　を

$$\langle b, \tau(a) \rangle = \langle tbt, \tau'(a) \rangle$$

とおく. つくり方から τ は有限次 normal cp-map.

$$\tau(1) = \langle t \cdot t, \tau'(1) \rangle = T(1)$$

$b_i' = \theta_f^{-1} \circ \tau'(b_i) \in \pi_f(R)'$　とおくと $\|b_i'\| \leqq 1$.

$\forall\, x \in R$　$\|x\| \leqq 1$　について

$$|\langle x, \tau(b_i) - \tau'(b_i) \rangle| = |\tau'(b_i)(txt - x)|$$

$$= |(b_i' \pi_f(txt - x)\xi_f, \xi_f)| = |(b_i'\pi_f(x)\eta, \eta) - (b_i'\pi_f(x)\xi_f, \xi_f)|$$

$$\leqq |(b_i' \pi_f(x)\eta,\ \eta - \xi_f)| + |(b_i' \pi_f(x)(\eta - \xi_f),\ \xi_f)|$$

$$\leqq \|\eta - \xi_f\|(1 + \|\xi_f\|) < \delta^{1/2}(1 + 1 + \delta^{1/2}) < \varepsilon - \delta$$

$\therefore\ \|\tau(b_i) - \tau'(b_i)\| < \varepsilon - \delta$ 　よって

$$\|\tau(b_i) - T(b_i)\| < \varepsilon$$

ここまでで最も困難な定理の (1) $\Longrightarrow$ (2) の主張をのぞいて証明が終ったことになる。(1) $\Longrightarrow$ (2) について Connes [12] の factor の場合の証明は II_1 − case が本質的であった。Wassermann の証明の基本はこの場合の Connes の証明を注意深く見なおして factor の "singularity" を一つ一つとり除いていくと結局全部とり除かれて global な II_1 − case の証明が完了するので他の場合も構造定理から成り立つことがわかるというものである。先ず準備として次の Lemma を示す ([13] 参照)

Tr ; $\mathcal{L}(H)$ の通常の trace

f_a ; (a, ∞) の特性関数 　　$a \geqq 0$

<u>Lemma 3.12</u> $h, k \in \mathcal{L}(H)$ の positive な Hilbert − Schmidt 作用素とすると

$$\int_0^\infty \|f_{\sqrt{a}}(h) - f_{\sqrt{a}}(k)\|_2^2\, da \leqq \|h - k\|_2 \|h + k\|_2$$

但し $\|\ \ \|_2$ は Hilbert − Schmidt ノルム

(証明)　$h = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$　　$k = \sum_{j \in J} \mu_j f_j$　（固有展開）

F, G ; R_+ 上のボレル関数で $F(0) = G(0) = 0$

かつ　$\sum_i |F(\lambda_i)|^2 \mathrm{Tr}(e_i) < \infty$，　$\sum_j |G(\mu_j)|^2 \mathrm{Tr}(f_j) < \infty$

となるものとする。このとき

$$F(h) = \sum_i F(\lambda_i) e_i \qquad G(k) = \sum_j G(\mu_j) f_j$$

はHS－作用素で

$$\mathrm{Tr}(F(h)G(k)) = \sum_{i,j} F(\lambda_i) G(\mu_j) \mathrm{Tr}(e_i f_j)$$

そこで R_+^2 上の discrete measure μ を次のようにつくる。

$$\mu\{(\lambda_i, \mu_j)\} = \mathrm{Tr}(e_i f_j)$$

$$\mu\{(\lambda_i, 0)\} = \mathrm{Tr}(e_i f_0) \qquad f_0 = 1 - \sum_j f_j$$

$$\mu\{(0, \mu_j)\} = \mathrm{Tr}(e_0 f_j) \qquad e_0 = 1 - \sum_i e_i$$

この測度を使うと

$$\mathrm{Tr}(F(h)G(k)) = \int F(x) G(y) \, d\mu(x, y)$$

次に

F', G' を R_+ 上のボレル関数で $F'(0) = G'(0) = 0$ かつ

$\sum_i |F'(\lambda_i)| \mathrm{Tr}(e_i) < \infty$，　$\sum_j |G(\mu_j)| \mathrm{Tr}(f_j) < \infty$

となるものとする。このとき

$$F'(h) = \sum_i F'(\lambda_i) e_i, \quad G'(k) = \sum G'(\mu_j) f_j$$

は共に trace class の作用素で

$$\mathrm{Tr}(F'(h)) = \int F'(x) \, d\mu(x, y)$$

$$\mathrm{Tr}(G'(k)) = \int G'(y)\, d\mu(x,y)$$

従って最初の関数 F, G について

$$\| F(h) - G(k) \|_2^2 = \mathrm{Tr}(F(h)^* F(h)) + \mathrm{Tr}(G(k)^* G(k))$$
$$- 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(G(k)^* F(h))$$
$$= \mathrm{Tr}(|F|^2(h)) + \mathrm{Tr}(|G|^2(k)) - 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\bar{G}(k)F(h))$$
$$= \int (|F|^2(x) + |G|^2(y))\, d\mu(x,y) - 2\,\mathrm{Re}\int \bar{G}(y)F(x)\, d\mu(x,y)$$
$$= \int |F(x) - G(y)|^2 d\mu(x,y)$$

そこで $a \geq 0$ について $F = G = f_a$ とする.

$$\| f_a(h) - f_a(k) \|_2^2 = \int |f_a(x) - f_a(y)|^2 d\mu(x,y)$$
$$= \int |f_a(x) - f_a(y)|\, d\mu(x,y)$$

しかるに $\forall x, y \in R_+$ について

$$\int_0^\infty |f_{\sqrt{a}}(x) - f_{\sqrt{a}}(y)|\, da = \int_0^\infty | f_a(x^2) - f_a(y^2)|\, da = |x^2 - y^2|$$

であるから

$$\int_0^\infty \| f_{\sqrt{a}}(h) - f_{\sqrt{a}}(k) \|_2^2 = \int_0^\infty \int | f_{\sqrt{a}}(x) - f_{\sqrt{a}}(y)|\, d\mu(x,y)\, da$$
$$= \int |x^2 - y^2|\, d\mu(x,y) \leq \left(\int |x-y|^2 d\mu(x,y)\right)^{1/2} \left(\int |x+y|^2 d\mu(x,y)\right)^{1/2}$$

$= \|h-k\|_2 \|h+k\|_2$

Lemma 3.13 $h_0, h_1, \cdots h_n$ HS-作用素, $\varepsilon > 0$

今 $\|h_j - h_0\|_2 \leqq \varepsilon \|h_0\|_2$ とすると

$\exists a > 0$; $f_a(h_0) \neq 0$ かつ

$$\sum_{j=1}^{n} \|f_a(h_j) - f_a(h_0)\|_2^2 \leqq 3n\varepsilon \|f_a(h_0)\|_2^2$$

(証明) $\|h_j + h_0\|_2 \leqq 3\|h_0\|_2$ と前のLemmaから

$$\int \sum_{j=1}^{n} \|f_{\sqrt{a}}(h_j) - f_{\sqrt{a}}(h_0)\|_2^2 \, da \leqq 3n\varepsilon \|h_0\|_2^2$$

ここで

$$\int \|f_{\sqrt{a}}(h_0)\|_2^2 \, da = \mathrm{Tr}\left(\int f_a(h_0^2) \, da\right) = \mathrm{Tr}(h_0^2) = \|h_0\|_2^2$$

よって

$$\int \sum_{j=1}^{n} \|f_{\sqrt{a}}(h_j) - f_{\sqrt{a}}(h_0)\|_2^2 \, da \leqq 3n\varepsilon \int \|f_{\sqrt{a}}(h_0)\|_2^2 \, da$$

$\therefore$ $\exists a > 0$; $f_a(h_0) \neq 0$

$$\sum_{j=1}^{n} \|f_a(h_j) - f_a(h_0)\|_2^2 \leqq 3n\varepsilon \|f_a(h_0)\|_2^2$$

Lemma 3.14 (Powers-Størmer の不等式)

positive HS-作用素 h, k について

$$\|h-k\|_2^2 \leq \|h^2-k^2\|_{Tr} \quad (\text{trace ノルム})$$

(証明) $s = h-k \quad t = h+k$ とおく

$\{\lambda_i\}$; s の固有値

$\{\xi_i\}$; $\{\lambda_i\}$ に対する固有 vector を元にした orthogonal basis $(\|\xi_i\|=1)$

先ず $t \geq \pm s$, $\frac{1}{2}(st+ts) = h^2-k^2$ より

$$\|h^2-k^2\|_{Tr} = Tr(|h^2-k^2|) = \sum_i \frac{1}{2}(|st+ts|\xi_i, \xi_i)$$

$$\geq \sum_i \left|\frac{1}{2}((st+ts)\xi_i, \xi_i)\right| = \sum_i |\lambda_i(t\xi_i, \xi_i)|$$

$$\geq \sum_i \lambda_i^2 = \sum_i (s^2\xi_i, \xi_i)$$

$$= Tr((h-k)^2) = \|h-k\|_2^2$$

R を H 上の von Neumann 環としたとき, $\mathcal{L}(H)$ の state ϕ が R の hypertrace であるとは, $\forall a \in R$, $x \in \mathcal{L}(H)$ について

$$\phi(ax) = \phi(xa)$$

が成り立つことをいう.

上の Lemma 12, 13 は countable な amenable discrete 群における Day の方法を用いた Namioka による Følner の定理の証明に示唆を得たものであるが次の Lemma はその結果の実質的な作用素環への寄与を示しており, Day の方法はここ

でも又使われている（amenable group については[27]参照）

Lemma 3.15　H上の von Neumann 環 R に hypertrace ϕ があるとする．このとき $\forall x_1, x_2 \cdots x_n \in R$ と $\varepsilon > 0$ について

$\exists e$; $\mathcal{L}(H)$ の有限次元 projection; $\|[e, x_j]\|_2 \leq \varepsilon \|e\|_2$

（証明）R の任意の元は R のユニタリ作用素の linear combination でかけるから，ユニタリ作用素について上のことを証明すれば十分である．

$u_1, u_2, \cdots u_n$ を R のユニタリ作用素とする．$\mathcal{L}(H)$ の n-fold copy $\mathcal{L}(H)^n$ の predual で

$$C = \{(\varphi - \varphi \mathrm{Ad} u_1, \varphi - \varphi \mathrm{Ad} u_2, \ldots, \varphi - \varphi \mathrm{Ad} u_n) \mid \varphi \text{ normal state}\}$$

とおく．C は convex set である．そこで C のノルム closure に 0 が入らないとすると，$(\mathcal{L}(H)_*)^n = (\mathcal{L}(H)^n)_*$ 上のノルム連続な functional i.e. $(x_1, x_2, \cdots x_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ と $\alpha > 0$ が存在して

$\forall$ normal state φ について

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n} (\varphi(x_j) - \varphi(u_j^* x_j u_j^*)) \geq \alpha$$

しかし hypertrace ϕ は normal state の弱*極限でかつ

$\phi(x_j) = \phi(u_j^* x_j u_j)$ であるから上の式は矛盾である．よって $0 \in \overline{C}$，従って

$\forall \delta > 0$ $\exists \varphi$; normal state on $\mathcal{L}(H)$

$$\| u_j \varphi u_j^* - \varphi \| \leqq \delta \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

$\varphi = Tr(\rho\,\cdot)$ とする. このとき ρ は Trace class の作用素で $Tr(\rho) = 1$, さて

$$u_j \varphi u_j^* (x) = \varphi(u_j^* x u_j) = Tr(\rho u_j^* x u_j) = Tr(u_j \rho u_j^* x)$$

だから非可換積分論から

$$\| \rho - u_j \rho u_j^* \|_{Tr} = \| \varphi - u_j \varphi u_j^* \| \leqq \delta$$

$h = \rho^{1/2}$, $h_j = u_j h u_j^*$ とおく (positive HS-作用素)

Lemma 3.14 から

$$\| h_j - h \|_2 \leqq \| h_j^2 - h^2 \|_{Tr}^{1/2} = \| u_j \rho u_j^* - \rho \|_{Tr}^{1/2} \leqq \delta^{1/2}$$

又 $\| h \|_2 = 1$ だから Lemma 3.13 から

$$\exists\, a > 0 \ ; \ f_a(h) \neq 0, \ \| f_a(h_j) - f_a(h) \|_2 \leqq \sqrt{3n\delta^{1/2}}\, \| f_a(h) \|_2$$

ここで

$f_a(h_j) = u_j f_a(h) u_j^*$. h は HS-作用素であるから

$Tr(f_a(h))$ は有限 i.e. $e = f_a(h)$ は有限次元 projection であるから上の δ を十分小さくとればこの e について

$$\| [e, u_j] \|_2 = \| u_j e u_j^* - e \|_2 \leqq \varepsilon \| e \|_2$$

Lemma 3.16 R ; finite injective von Neumann 環

Z ; R の center

Φ ; center valued Trace とする. このとき

$\forall\, a_1, \cdots a_n, b_1, \cdots b_n \in R$ と $\varepsilon > 0$ について

$\exists\, \varphi_0$; normal state on Z,

$$|\varphi_0(\Phi(\sum_{i=1}^n a_i b_i^*))| \leq \|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c\|_\alpha + \varepsilon$$

ここでb_i^cは次の意味である．H^cをHと共役なヒルベルト空間とし，その間の対応を$\xi \longrightarrow \xi^c$とかくと，$x \in \mathcal{L}(H)$に対して$\mathcal{L}(H^c)$の作用素$x^c$を$x^c\xi^c = (x\xi)^c$で定義出来る．

(Lemmaの証明)　$\|a_i\| \leq 1$としてよい．$c = \sum_{i=1}^n a_i b_i^*$とおく．先ず$R$の任意のstate φに対して

$\exists\ 0<\delta<1$, $u_1, \cdots u_K \in R$ ユニタリ作用素；

$$\|u_i\varphi - \varphi u_i\| \leqslant \delta \implies |\varphi(c - \Phi(c))| \leq \varepsilon$$

を示そう．上のことが成り立たないとすると

$\exists\,\alpha>0$; $\forall$ ユニタリ作用素の有限集合Fと$\forall n$について

state $\varphi_{F,n}$が存在して　$u \in F$について

$\|u\varphi_{F,n} - \varphi_{F,n} u\| < \frac{1}{n}$　かつ　$|\varphi_{F,n}(c - \Phi(c))| \geq \alpha$

そこでψを$\{\varphi_{F,n}\}$の弱$*$極限点の一つとすると，ψは tracial stateになるから[20；系 p.254]より　$\psi = \psi\circ\Phi$となって矛盾になる．

今μを$\mathcal{L}(H)$からRへのノルム1のprojectionとすると，そのmodule propertyから　$\phi = \varphi_0\circ\Phi\circ\mu$は$R$のhypertraceである．そこでLemma 3.15のprojection eを$b_1, b_2, \cdots b_n$に対してとるばかりでなく上記の$u_1, u_2, \cdots u_K$に対しても

$$\|[u_j, e]\|_2 \leq \frac{\delta}{3}\|e\|_2$$

が成り立つ $\delta >$ にとっておく。 R の state φ_0 を

$$\varphi_0(x) = \mathrm{Tr}(exe)/\mathrm{Tr}(e) \quad \text{とおく.}$$

φ_0 は Hilbert-Schmidt の内積を使えば

$$\varphi_0(x) = \langle xe, e\rangle_2 / \langle e, e\rangle_2 \qquad \text{である.}$$

$$u_j^* \varphi_{0 u_j}(x) = \langle x u_j^* e, u_j^* e\rangle_2 / \langle e, e\rangle_2$$
$$= \langle x e_j, e_j\rangle_2 / \langle e, e\rangle_2 \qquad 但し\ e_j = u_j^* e u_j$$

よって $\|e_j - e\|_2 \leq \frac{\delta}{3}\|e\|_2$ と合せて

$$\|\varphi_0 - \varphi_0 \circ \mathrm{Ad}\, u_j\| \leq 2\delta/3 < \delta$$

$$\therefore \quad |\varphi_0(c - \Phi(c))| \leq \varepsilon$$

一方 $\|a_j\| \leq 1$ と $\|[b_i, e]\|_2 \leq \varepsilon \|e\|_2$ から

$$\|a_i(eb_i^* - b_i^* e)e\|_2 \leq \varepsilon \|e\|_2$$

よって

$$|\langle (ea_ie)(eb_ie)^* e, e\rangle_2 - \langle a_i b_i^* e, e\rangle_2| \leq \varepsilon \|e\|_2^2$$

従って, $a_i' = ea_ie$, $b_i' = eb_ie$ とおいて

$$\left|\left\langle \sum_{i=1}^n a_i' b_i'^* e, e\right\rangle_2 - \langle ce, e\rangle_2\right| \leq n\varepsilon \|e\|_2^2$$

$K = eH$ とおく. $e\mathcal{L}(H)e = \mathcal{L}(K)$ について

$$\tau(x) = \langle xe, e\rangle_2 / \langle e, e\rangle_2$$

は canonical trace でこれまでの計算から

$$\left|\tau\left(\sum_{i=1}^n a_i' b_i'^*\right) - \varphi_0 \cdot \Phi\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i^*\right)\right| \leq (n+1)\varepsilon$$

$K \underset{\sigma}{\otimes} K^c$ の isometric involution J を

$$J(\xi \otimes \eta^c) = \eta \otimes \xi^c$$

と定義する。このとき

$$J(x \otimes 1) J = 1 \otimes x^c \qquad x \in \mathcal{L}(K)$$

$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_m$ を K の orthonormal basis として

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_j \xi_j \otimes \xi_j^c \qquad \text{とおくと}$$

$$\|\xi\| = 1, \quad ((x \otimes 1)\xi, \xi) = \tau(x)$$

又上の J の定義から作用素の行列表示で計算すれば

$$J\xi = \xi, \quad J(x \otimes 1)\xi = (x^* \otimes 1)\xi$$

ゆえに

$$\tau\left(\sum_{i=1}^n a_i' b_i'^*\right) = \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i' b_i'^* \otimes 1\right)\xi, \xi\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n (a_i' \otimes 1) J (b_i' \otimes 1) J\xi, \xi\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n a_i' \otimes b_i'^c \xi, \xi\right)$$

一方 ξ を $H \underset{\sigma}{\otimes} H^c$ の元と考えれば $(e \otimes e^c)\xi = \xi$ だから

$$e \otimes e^c \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c\right) e \otimes e^c = \sum_{i=1}^n a_i' \otimes b_i'^c$$

従って

$$\tau\left(\sum_{i=1}^n a_i' b_i'^*\right) = \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c \xi, \xi\right)$$

$$\therefore \qquad |\varphi_0 \circ \Phi(c)| \leq \left\|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c\right\|_\alpha + (n+1)\varepsilon$$

εはnにdependしないからLemmaの結論が言えたことになる。

次のLemmaがConnes [12]には全然なかった部分である。

Lemma 3.17. 前のLemmaの条件の下で

$$\|\Phi(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^*)\| \leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i^c\|_\alpha$$

(証明) 左辺の方が大きいとし、右辺をβとおくと

$\exists z$: central projection, 複素数λ; $|\lambda| > \beta$

$$\|z\Phi(c) - \lambda z\| < \frac{1}{2}(|\lambda| - \beta)$$

$\varepsilon = \frac{1}{2}(|\lambda| - \beta)$としてLemma 3.16を$R_z$にあてはめると

$\exists \varphi$: normal state on R_z; $|\varphi(z\Phi(c))| \leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i z \otimes (b_i z)^c\|_\alpha + \varepsilon$

このとき上の不等式の右辺は

$$\|(z \otimes z^c)\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i^c\|_\alpha + \varepsilon$$

$$\leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i^c\|_\alpha + \varepsilon = \frac{1}{2}(|\lambda| + \beta)$$

一方

$$|\varphi(z\Phi(c)) - \lambda| \leq \|z\Phi(c) - \lambda z\| < \frac{1}{2}(|\lambda| - \beta)$$

から $$|\varphi(z\Phi(c))| > \frac{1}{2}(|\lambda| + \beta)$$

となって前の式に矛盾する。

Lemma 3.18 Rがfiniteなinjective von Neumann環なら

ば性質(A)をもつ.

(証明) R の各 direct summand が injective ということと, R が injective ということとは同値だから R の center が faithful な normal state φ をもつと考えてよい. Φ を center valued trace とし $\varphi\circ\Phi$ を又 φ でかくことにする (R の normal state) 前の Lemma から $\forall a_1 \cdots a_n, b_1, \cdots b_n \in R$ について

$$|\varphi(\sum_{i=1}^n a_i b_i^*)| \leq \|\sum_{i=1}^n a_i \otimes b_i^c\|_\alpha$$

R を $\pi_\varphi(R)$ と同一視し, ξ を π_φ による cyclic separating vector とする. J をこれについての canonical involution とすると, ξ は trace vector であるから

$$J x \xi = x^* \xi$$

又このとき $x^c \longleftrightarrow x \longleftrightarrow JxJ$ という対応で R^c と R' とは同型になっている. $\varphi(x) = (x\xi, \xi)$ から

$$|(\sum_{i=1}^n a_i J b_i J \xi, \xi)| = |\varphi(\sum_{i=1}^n a_i b_i^*)| \leq \|\sum_{i=1}^n a_i \otimes J b_i J\|_\alpha$$

よって $\forall x_1, x_2 \cdots x_n \in R$, $y_1, y_2 \cdots y_n \in R'$ について

$$|((\sum_{i=1}^n x_i y_i)\xi, \xi)| \leq \|\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\|_\alpha$$

従って functional $\phi(x) = (\eta(x)\xi, \xi)$ は $R \otimes R'$ 上で α-ノルムに関して連続である. よって ϕ を $R \otimes_\alpha R'$ まで拡大したものを又 ϕ とかくと (state になっている)

$\forall x, y \in R \otimes R'$ について

$$\|\eta(x)\eta(y)\xi\|^2 = \phi(y^* x^* x y) \leq \|x\|_\alpha^2 \phi(y^* y)$$
$$= \|x\|_\alpha^2 \|\eta(y)\xi\|^2$$

$[\eta(R \otimes R')\xi] = H$ であるから、上から

$$\|\eta(x)\| \leq \|x\|_\alpha$$

即ちηはαーノルムで連続である.

以上から finite な von Neumann 環については injective と semidiscrete が同値になる. I型の von Neumann 環は前にのべたように injective でかつ semidiscrete でもあるから、テンソル積の結果から semifinite な von Neumann 環について injective と semidiscrete と性質(A)とは同値になることがわかる. (テンソル積について、$R \bar{\otimes} S$ が injective ならば R と S は又 injective である — slice map を使えばよい)

最後にIII型の von Neumann 環についての証明には竹崎[33]の duality を用いる. MをH上の von Neumann 環とする. 又 $u(t)$ を実数RのH上への強連続なユニタリ表現とし、更に $u(t)Mu(-t) \subseteq M$ $(t \in R)$ となっているものとする. 今 $\alpha_t(x) = u(t)xu(-t)$ とおけば $t \longrightarrow \alpha_t$ はMの one parameter * 同型群としてのRの表現である. $K(H, R)$ をR上の、compact support をもつ H-valued な連続函数の空間でノルムを

$$\|\xi\|_2 = \left\{\int_{R}\|\xi(t)\|^2 dt\right\}^{1/2}$$

とつけたものとする.

R上の complex valued な連続関数で compact support をもつものの全体を $K(R)$ とかく. $K(H,R)$ は自然な形で $H\underset{\sigma}{\otimes}L^2(R)$ の dense な部分空間と考えることが出来る. さて任意の $K(H,R)$ の関数 ξ について $t \longrightarrow u(-t)\xi(t)$ は又 $K(H,R)$ の関数でしかもノルムは変らないから.

$\exists U$; $H\underset{\sigma}{\otimes}L^2(R)$ のユニタリ作用素 ; $(U\xi)(t) = u(-t)\xi(t)$

$$(\xi \in K(H,R))$$

そこで $x \in M$ について $\pi_\alpha(x) = U(x\otimes 1)U^*$ とおく.

$\forall \xi \in K(H,R)$ については

$$(\pi_\alpha(x)\xi)(t) = u(-t)xu(t)\xi(t) = \alpha_{-t}(x)\xi(t)$$

次に $H\underset{\sigma}{\otimes}L^2(R)$ のユニタリ $\lambda(t)$ を

$$(\lambda(t)\xi)(s) = \xi(s-t) \quad (\xi \in K(H,R))$$

と定義する. このとき $H\underset{\sigma}{\otimes}L^2(R)$ 上の von Neumann 環

$$R(M,\alpha) = \{\pi_\alpha(M), \lambda(R)\}''$$

が action α による M の crossed product である.

$y \in M'$ について $\pi'_\alpha(y) = y\otimes 1$ とおく

$\pi'_\alpha(M') \subseteq R(M,\alpha)'$ $\left((\pi'_\alpha(y)\xi)(t) = y\xi(t) \quad \xi \in K(H,R)\right)$

である. そこで又ユニタリ作用素 $\mu(t)$ を $\xi \in K(H,R)$ について

$$(\mu(t)\xi)(s) = e^{-ist}\xi(s)$$

と定義する。このとき $t \longrightarrow \mu(t)$ は強連続な $\mathbb{R}$ のユニタリ表現であり、つくり方から

$$\mu(t)\pi_\alpha(x)\mu(-t) = \pi_\alpha(x), \quad \mu(t)\lambda(s)\mu(-t) = e^{-ist}\lambda(s)$$

よって

$$\mu(t)R(M,\alpha)\mu(-t) = R(M,\alpha)$$

で $\hat{\alpha}_t(x) = \mu(t)x\mu(-t)$ は $R(M,\alpha)$ の $*$ 同型対応である。$\hat{\alpha}$ を $\mathbb{R}$ の $R(M,\alpha)$ への dual action という。以下の証明では竹崎の duality; $R(R(M,\alpha),\hat{\alpha}) \cong M\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ と $R(M,\alpha)$ から $\pi_\alpha(M)$ へノルム 1 の projection が常に存在するということが本質的である。あとのことは実数群 $\mathbb{R}$ の amenability と $\pi_\alpha(M)$ が dual action $\hat{\alpha}$ の fixed point algebra であることに起因している。

Lemma 3.19 M を H 上の III 型の von Neumann 環とする。M が injective ならば性質 (A) をもつ

(証明) Duality から $R(R(M,\alpha),\hat{\alpha}) \cong M\bar{\otimes}\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R})) \cong M$ であるが更にこのとき [53; 定理 8.2] から action α を $R(M,\alpha)$ が semifinite になるようにとらぶことが出来る。M を injective とすると $R(R(M,\alpha),\hat{\alpha})$ は injective である。従って $\pi_{\hat{\alpha}}(R(M,\alpha))$ が injective になり、$R(M,\alpha)$ が injective であることがわかる。従ってこれまでのことから $R(M,\alpha)$ は性

質(A)をもつ．即ち $a_i \in R(M,\alpha)$, $b_i \in R(M,\alpha)'$ について

$$\|\sum_i a_i b_i\| \leq \|\sum_i a_i \otimes b_i\|_\alpha$$

よって特に $x_i \in M$, $y_i \in M'$ については

$$\|\sum_i \pi_\alpha(x_i)\pi'_\alpha(y_i)\| \leq \|\sum_i \pi_\alpha(x_i) \otimes \pi'_\alpha(y_i)\|_\alpha$$
$$= \|\sum_i x_i \otimes y_i\|_\alpha$$

そこで $\xi \in H$, $f \in K(R)$ をとると

$$\|\sum_i \pi_\alpha(x_i)\pi'_\alpha(y_i)(\xi \otimes f)\|^2 = \int_R \|\sum_i \alpha_{-t}(x_i)y_i\xi\|^2 |f(t)|^2 dt$$

$$\leq \|\sum_i \pi_\alpha(x_i)\pi'_\alpha(y_i)\|^2 \|\xi\|^2 \|f\|_2^2$$

$$\leq \|\sum_i x_i \otimes y_i\|_\alpha \|\xi\|^2 \|f\|_2^2$$

ここで $t \longrightarrow \sum_i \alpha_{-t}(x_i)y_i\xi$ は連続な H-valued 関数で

$f \in K(R)$ は任意であるから上のことから

$$\|\sum_i \alpha_{-t}(x_i)y_i\xi\| \leq \|\sum_i x_i \otimes y_i\|_\alpha \|\xi\| \quad (t \in R)$$

よって

$t = 0$ として ξ を動かせば

$$\|\sum_{i=1}^n x_i y_i\| \leq \|\sum_i x_i \otimes y_i\|_\alpha$$

即ち M は性質(A)をもつ．

求める同値性は von Neumann 環の各 direct summand について言えば十分であるからこれで定理の証明が終ったことになる．

主な文献

[12], [13], [24], [46], [55]

§4. Completely positive map による approximation property. C^*環の場合.

前節の定理により C^*環の nuclear 性と von Neumann 環の近似性質との関係が次のように明らかになる. C^*環 A について その enveloping von Neumann 環を $\tilde{A}$ とかく.

定理4.1 次は同値である

(1) A は nuclear

(2) A^* の単位作用素は有限次の CP-map で各点ごとにノルム近似が出来る (ノルムが1以下 i.e. contraction)

(3) $\tilde{A}$ が injective (4) $\tilde{A}$ が semidiscrete

(証明) (4) $\Longrightarrow$ (2) $(\tilde{A})_* = A^*$ であるから Lemma 3.10 の前でのべたようにして(2)が成り立つ.

(2) $\Longrightarrow$ (1) 仮定から任意の C^*環 B について, B より A^* への CP-contraction map は有限次の CP-contraction map で弱*位相で近似出来る. よって Lemma 3.6 から A は nuclear.

(1) $\Longrightarrow$ (3) A の任意の state φ について $\pi_\varphi(A)''$ が injective なことを示せばよい. 従って $\pi_\varphi(A)'$ が injective なことを示せばよい. $\forall$ C^*環 $B_1 \supset B$ (部分環)

$$\tau ; B \longrightarrow \pi_\varphi(A)' \qquad \text{CP-map}$$

τがB_1まで cp-map として拡大出来ることを示そう. 先ずB_1はユニタルで $1_{B_1} = 1_B$ と考えておいてもよい.

$$\theta_\varphi \circ \tau ; B \longrightarrow \pi_\varphi(A)' \longrightarrow [\varphi] \subset A^*$$

は有界な cp-map. よって定理2.2から

$$\exists f, \text{ positive linear functional on } A \otimes B ; L(f) = \theta_\varphi \circ \tau$$

ここで f は C^* 環 $A \otimes_\nu B$ 上の positive functional とみてよく, 又仮定から $A \otimes_\nu B = A \otimes_\alpha B \subset A \otimes_\alpha B_1$

と考えられるから f の $A \otimes_\alpha B_1$ への positive extension を $\tilde{f}$ とする. $0 \leq b \leq 1$ $b \in B_1$ について

$$0 \leq L(\tilde{f})(b) \leq L(\tilde{f})(1) = L(f)(1) = \theta_\varphi \circ \tau(1)$$

から $L(\tilde{f})(b) \in [\varphi]$ 従って $L(\tilde{f})(B_1) \subset [\varphi]$.

これから

$$\hat{\tau} = \theta_\varphi^{-1} \circ L(\tilde{f}) ; B_1 \longrightarrow \pi_\varphi(A)'$$

とおけば, つくり方から $\hat{\tau}$ は τ の B_1 への CP-extension である.

系4.1. nuclear C^* 環の quotient algebra は又 nuclear

上と同様に nuclear C^* 環の ideal も又(3)から nuclear であることが言えるが部分環についてはこれが成立しないことが Choi [11] により示されている.

次に approximation property の C^* 環を示すために Lemma

3.6 を精密化することから始める.

Lemma 4.2　$f \in S^\circ(A \otimes_\alpha B)$

$\rightleftarrows$ $R(f)$ ($L(f)$ についても) が下の type の有限次 CP-contraction で近似出来る

$$\begin{tikzcd} & M_n \arrow[dr, "\tau"] & \\ A \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "R(f)"'] & & B^* \end{tikzcd} \qquad \|\tau \circ \sigma\| \le 1$$

(上のような時に上の diagram は pointwise w^*-topology で approximately commute という)

(証明)　A を H 上に作用し、B を K 上に作用しているとすると $S^\circ(A \otimes_\alpha B)$ の中で

$$f = \sum \lambda_i \omega_{\xi_i} \qquad \xi_i \in H \otimes_\sigma K, \quad \|\xi_i\| = 1$$
$$\lambda_i \ge 0, \qquad \sum_i \lambda_i \le 1$$

の形の functional は弱$*$-dense だから上の形の f について $R(f)$ が diagram の map に分解出来ることを示せばよい。それには先ず分解出来るような map の集合が n を動かしたときに convex cone をつくることを示そう.

$$A \xrightarrow[\sigma_i]{} M_{n_i} \xrightarrow[\tau_i]{} B^* \qquad i = 1, 2 \quad \text{について}$$

$$\sigma : A \longrightarrow M_{n_1+n_2}, \qquad \tau : M_{n_1+n_2} \longrightarrow B^* \quad を$$

$$\sigma(a) = \begin{bmatrix} \sigma_1(a) & 0 \\ 0 & \sigma_2(a) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \xrightarrow{\tau} \tau_1(\alpha) + \tau_2(\delta) \in B^*$$

と定める. 定理 2.6 から

$$\sigma_i = \Delta(\varphi_i) \qquad \varphi_i \in M_{n_i}(A)^{*+}$$

$$\tau_i = \theta(\psi_i) \qquad \psi_i \in M_{n_i}(B)^{*+}$$ とかける.

このとき $M_{n_1+n_2}(A)$ 上の positive functional

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & \varphi_2 \end{bmatrix} \qquad 但し$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \varphi \right\rangle = \langle a_1, \varphi_1 \rangle + \langle a_4, \varphi_2 \rangle$$

と $M_{n_1+n_2}(B)$ 上の positive functional

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{bmatrix}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3, & b_4 \end{bmatrix}, \psi \right\rangle = \langle b_1, \psi_1 \rangle + \langle b_4, \psi_2 \rangle$$

によってそれぞれ

$$\sigma = \Delta(\varphi), \qquad \tau = \theta(\psi)$$

とかけるから σ, τ は共に cp-map でつくり方から

$$\tau_1 \circ \sigma_1 + \tau_2 \circ \sigma_2 = \tau \circ \sigma$$

convexity は上の $\tau_i \circ \sigma_i$ に weight をつけたものだから,

これから分解出来る map で $\|\tau \circ \sigma\| \leq 1$ となるもの全体

は convexである. 他の点は明らかだから positive cone になる. 以上から結局 $R(\omega_\zeta)$ の分解が出来ればよいことになる. ここで ζ は又 $H\otimes K$ の元と考えてよいから

$$\zeta=\sum_{i=1}^m \xi_i\otimes\eta_i \qquad \xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots \xi_m)$$
$$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots \eta_m)$$ とおくと

$$\omega_\xi=[\omega_{\xi_j,\xi_i}]\in M_m(A)^{*+}$$
$$\omega_\eta=[\omega_{\eta_j,\eta_i}]\in M_m(B)^{*+}$$

そこで

$$\sigma=\Delta(\omega_\xi),\quad \tau=\Delta(\omega_\eta)\quad (\text{cp-map})$$ をとる.

$$\langle b, R(\omega_\zeta)(a)\rangle=\omega_\zeta(a\otimes b)=\sum_{i,j}(a\xi_i,\xi_j)(b\eta_i,\eta_j)$$
$$=\langle b,\sum_{i,j}\Delta(\omega_\xi)(a)_{ij}\,\omega_{\eta_j,\eta_i}\rangle=\langle b,\theta(\omega_\eta)\cdot\Delta(\omega_\xi)(a)\rangle$$
$$=\tau\circ\sigma(a)(b)\qquad \text{i.e. } R(\omega_\zeta)=\tau\circ\sigma$$

又 $\|\tau\circ\sigma\|=\|R(\omega_\zeta)\|\leq\|\zeta\|=1$

<u>定理 4.3</u> C^*環Aが nuclear であるための必要十分条件は, Aの単位作用素が有限次の cp-contraction map で各点ごとにノルムで近似出来ることである.

(証明) 十分性は定理 2.2 ― Lemma 3.6 で示されているから必要性のみ示せばよい. 先ずAがユニタルの時を証明する.

次の diagram が approximately commute (point-σ-weak topology) なことを示す. $\tilde{A}$ が H 上に作用しているとする.

$$\begin{tikzcd} & M_n \arrow[dr, "\tau"] & \\ A \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\text{embedding}"'] & & \tilde{A} \end{tikzcd} \qquad \|\tau\circ\sigma\| \leq 1, \quad \sigma(1) = 1$$

$\tilde{A}$ では normal state は皆 vector state であるから. それには

$\forall a_1, \cdots a_s \in A$, $\xi_1, \cdots \xi_t \in H$ $\|\xi_i\| \leq 1$ に対して

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \sigma, \tau$: 上の様な CP-map

$$|((\tau\circ\sigma(a_i) - a_i)\xi_j, \xi_j)| < \varepsilon$$

を示せばよい.

$e_j = [\tilde{A}'\xi_j]$ への projection $(\in \tilde{A})$ とし

$e = \bigvee_{j=1}^{t} e_j$ とする.

e は countably decomposable な projection である. よって [20; 定理4の系, p. 223] から eH は separating vector ξ_0 をもつ, i.e. $e = P_{[\tilde{A}'\xi_0]}$. $\xi_j \in eH$ であるからここでは

$b_1, b_2, \cdots b_t \in \tilde{A}'$ について σ, τ をえらんで

$$|((\tau\circ\sigma(a_i) - a_i) b_j \xi_0, b_j \xi_0)| < \varepsilon$$

が言えればよいことになる. $R = \tilde{A}'e$ とおくと上の b_j を R の元とみて差支えない.

$\varphi = \omega_{\xi_0} \in R_*$ をとり $\eta : A \longrightarrow R'$ を $\eta(a) = eae$ と定義すると $\pi_\varphi(R)$ は spacial に R と同一視出来るから

$$\theta_\varphi : R' \longrightarrow [\varphi] \subseteq R_*$$

が考えられる. Aは nuclear であるから Lemma 4.2 から次の diagram は point-w^* topology で approximately commute

$$
\begin{tikzcd}
 & M_n \arrow[dr, "\tau"] & \\
A \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[rr, "\theta_\varphi \circ \eta"'] & & {[\varphi] \subseteq R_* \subset R^*}
\end{tikzcd}
$$

又 Lemma の証明から分かるようにその時の CP-map $\tau \circ \sigma$ は $\tau \circ \sigma(A) \subseteq R_*$ となるようにとれる. 従って diagram は point-weak topology で approximately commute. よって それらの convex combination を考えて(同じ型になる) 上の diagram が point-norm topology で approximately commute であることが言える. $\theta_\varphi \circ \eta(1) = \varphi$. このとき Lemma 3.10, 3.11 より近似する CP-map についても $\tau \circ \sigma(1) = \varphi$ と考えてよい. $\beta = \sigma(1)$ とおく.

Proposition 1.10 から

$\exists$ユニタル CP-map $\sigma' ; A \longrightarrow M_n$

$$\sigma(x) = \beta^{1/2} \sigma'(x) \beta^{1/2}$$

そこで $\tau' ; M_n \longrightarrow R_*$ を

$$\tau'(\alpha) = \tau(\beta^{1/2} \alpha \beta^{1/2})$$ とおくと

$\tau'(1) = \tau \circ \sigma(1) = \varphi$ でかつ $\tau' \circ \sigma' = \tau \circ \sigma$

又 $\tau'(M_n) \subseteq [\varphi]$.

従って $\theta_\varphi \circ \eta$ と $\{\sigma', \tau'\}$ という family が approximately commute となる. 次の diagram を考える

$$\begin{tikzcd} & M_n \arrow[dr, "\theta_\varphi^{-1}\circ\tau'"] & & \\ A \arrow[ur, "\sigma'"] \arrow[rr, "\eta"'] & & \hat{A}e \arrow[r, "\iota", "\text{injection}"'] & \tilde{A} \end{tikzcd}$$

$\tau'' = \iota\circ\theta_\varphi^{-1}\circ\tau'$ とおくと

$$((\tau''\circ\sigma'(a_i) - a_i)b_j\xi_0,\ b_j\xi_0)$$

$$= (b_j^* b_j(\theta_\varphi^{-1}\circ\tau'\circ\sigma'(a_i) - \eta(a_i))\xi_0,\ \xi_0)$$

$$= \langle b_j^* b_j\ ,\ \tau'\circ\sigma'(a_i) - \theta_\varphi\cdot\eta(a_i)\rangle \longrightarrow 0$$

よって

$$\begin{tikzcd} & M_n \arrow[dr, "\tau''"] & \\ A \arrow[ur, "\sigma'"] \arrow[rr, "\text{embedding}"'] & & \hat{A} \end{tikzcd}$$

が求める diagram である.

$$\|\tau''\circ\sigma'\| = 1$$

さて $A \xrightarrow{\sigma_\nu} M_n \xrightarrow{\tau_\nu} \hat{A}$ $\quad \sigma_\nu(1) = 1$

$$\tau_\nu\circ\sigma_\nu(a) \longrightarrow a \quad \sigma\text{-weakly} \quad (a\in A)$$

とする. 定理 2.6 から

$$\exists\, u_\nu \in M_n(\hat{A})^+ \ ;\ \theta(u_\nu) = \tau_\nu$$

しかし $M_n(A)$ は $M_n(\hat{A})$ で σ-weakly dense だから

$$\exists\, u_{\nu\mu} \in M_n(A)^+ \ ;\ u_{\nu\mu} \longrightarrow u_\nu \quad \sigma\text{-weakly}$$

これから $\tau_{\nu\mu} = \theta(u_{\nu\mu})\ ;\ M_n \longrightarrow A$

は各点ごとに σ-weak topology で τ_ν に収束する. 従って

$$\tau_{\nu\mu}\circ\sigma_\nu \ ; A \longrightarrow A$$

は各点ごとに σ-weakly に単位作用素に収束する. しかし A 上では σ-weak 位相は弱位相と同じだから、上の CP-map の convex combination (又同じ型) をとることにより diagram

$$\begin{tikzcd} & M_n \arrow[dr, "\tau_\lambda"] & \\ A \arrow[ur, "\sigma_\lambda"] \arrow[rr, "\text{identity}"'] & & A \end{tikzcd}$$

$\sigma_\lambda(1)=1$, approximately commute in point-norm topology

このとき $\tau_\lambda(1)=\tau_\lambda\cdot\sigma_\lambda(1)\longrightarrow 1$ (ノルム収束)

であるから $\|\tau_\lambda\|=\|\tau_\lambda(1)\|\longrightarrow 1$

よって τ_λ を $\tau_\lambda/\|\tau_\lambda\|$ でとりかえれば求める CP-contraction による近似 diagram が出来る.

A が non-unital のときは、$A+\lambda 1=A_1$ が又 nuclear になるから上の結果が求まり、それを A に制限すれば有限次 CP-contraction による単位(恒等)作用素の近似が得られる.

上の証明からわかるように得られた近似は単に有限次の CP-contraction というだけでなく上のような分解の出来る map $\tau_\lambda\circ\sigma_\lambda$ でということで中身がより精密になっているわけである. 上の結果の一つの大きな帰結として次のことがある

系 4.3 Nuclear C^*環は Grothendieck の metrical approximation property をもっている.

上の逆が最近までは成立するのではないかと思われていたが, Haagerup [31] が non-nuclear C^*環の典型ともいうべき2ヶの生成元をもつ自由群からの (reduced) C^*群環が metrical approximation property をもつことを示したので,その性質をもつ C^*環の class がどんなものになるのか予想もつかないことになってきている.

主な文献

[15], [24], [46]

あとがき

CP-mapの話題で本稿からぬけてしまったものにliftingの話とFubini積の話がある. CP-mapに関する話題の集成としてはこれらのことも追加すべきであろうがこの2つは講義から完全にぬけていたので lecture note という原型をこわしたくない気持もあって、ここではその詳細は割愛することにした. 興味をもたれる方のために一応のスケッチをのべてみる. A, B を C^*環, I を B の ideal とする. A から

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, "\tau"'] & B/I \end{tikzcd}$$

B/I への CP-map τ に対して q を B から B/I への quotient map としたとき, A より B への CP-map σ が $\tau = q\circ\sigma$ となるように存在するかというのが CP-map の lifting の問題である. これは元々は positive map の lifting の問題として考えられていたが作用素環として本質的なのはやはり CP-map の lifting である. この講義では §3, 4 節を目標としたため時間的な制約ではずれたが話としては§1に入るべきものである.

一般の C^*環についてはこの問題は例えば $B = \ell^\infty$, $I = c_0$, $A = B/I$ としてその恒等写像を考えてみればわかるように、可換の場合でも lifting の存在は negative であるがある class の(特に可分な) C^*環についてそれらが存在するかどうかは、たとえば BDF 理論などに深い関係をもっている. 実際 Arveson

[4] (cf. [8]) は Ext(X) の場合について (BDF [7], $A = C_0(X)$ $B = \mathcal{L}(H)$, $I = C(H)$, H: 可分なヒルベルト空間の場合) CP-map の lifting の結果 (この時には可換な場合なので positive map の lifting の結果) を用いて Ext(X) の元が逆元をもつこと (従って Ext(X) が群になること) を非常に簡単明快に示している。その後 BDF 理論が更に発展し ([6], [8] etc) 非可換の C^*環について Ext(A) の構造が問題になってきたが Choi-Effros [18] は §4 の議論の technique を用いて可分な nuclear C^*環 A について前述の diagram で CP-map の lifting が存在することを証明した。Ext(A) は Voiculescu [58] によって可分な C^*環については一般に単位元をもつ (可換) semigroup になるので、上の結果により、A が可分な nuclear 環のときは Ext(A) は群になる。更に Anderson [1] は Ext(A) が必ずしも群にならない可分な C^*環の例を示し、合せて可分な C^*環についても lifting の問題は一般には negative であることを示した (前の ℓ^∞ の例では ℓ^∞/c_0 は可分な C^*環にはならない)。又これらについては Arveson [5] が更に見通しのよい再構成を与えている。一般の Banach 空間での lifting の最近の結果としては §4 でもとりあげた、metrical approximation property をもつ可分な空間については contractive な lifting の存在が知られている ([19])。

C^*環の Fubini 積の CP-map としての問題は定理 2.3（又 Proposition 2.1）の直接の延長上にあるものである. A, B を C^*環 C, D のそれぞれの C^*部分環としたとき

$$F_{C\otimes_\alpha D}(A, B) = \{x \in C\otimes_\alpha D \mid R_\varphi(x)\in B,\ L_\psi(x)\in A \quad \forall\varphi\in C^*,\ \psi\in D^*\}$$

を（$C\otimes_\alpha D$ に関する）A, B の Fubini 積と呼ぶ（富山，[48], [49] [50]）. $F_{C\otimes_\alpha D}(A, B)$ はある場合には $A\otimes_\alpha B$ に常に等しくなるが Wassermann [54], [56] によって示されたように，一般には $A = C(H)$ というような簡単な C^*環でも，$\mathcal{L}(H)\otimes_\alpha\mathcal{L}(H)$ の中で $F_{\mathcal{L}(H)\otimes_\alpha\mathcal{L}(H)}(C(H), \mathcal{L}(H))$ は $C(H)\otimes_\alpha\mathcal{L}(H)$ とは等しくならない。しかし x が $F_{C\otimes_\alpha D}(A, B)$ の元の時には $R_\varphi(x)$ の値は $\varphi|A$（φ の A への制限）によってのみきまるので，$x \notin A\otimes_\alpha B$ の時も系 2.3 の様な map

$$\gamma(x) \mid \varphi\in A^* \longrightarrow R_{\tilde\varphi}(x)\in B \quad (\tilde\varphi \text{ は } \varphi \text{ の拡大})$$

が考えられ，$x \geq 0$ の時には $\gamma(x)$ は CP-map になる. 従って Fubini 積の問題は A^* より B（又は B^* より A）への有限次 CP-map のある種の closure の問題を含み，このような map の集合の大きさ又その中での部分空間 $\{\gamma(x) \mid x\in F_{C\otimes_\alpha D}(A, B)\}$（特に $\{\gamma(x) \mid x\in A\otimes_\alpha B\}$）の性格の問題であるとも言える. それは又 lifting の問題とも関連をもち，実際上の $\mathcal{L}(H)\otimes_\alpha\mathcal{L}(H)$ についての Wassermann の結果は Calkin algebra $\mathcal{L}(H)/C(H)$ の恒等写像

が $\mathcal{L}(H)$ までは持上げられないという(知られている)結果の別証を与えている。更に又[56]での彼の議論は Ext(A) の反例をつくった[1]の中の議論に負う所が多い。一方上述のような CP-map の空間の characterization は直接の関連として(定理 2.3 にもみられたように) von Neumann 環としてのテンソル積 $R\bar{\otimes}S$ と C^* テンソル積 $R\otimes_\alpha S$ との比較の問題を含んでいる([50]).

$R\bar{\otimes}S$ の $\mathcal{L}(H)\bar{\otimes}\mathcal{L}(K)$ に関する σ-weakly continuous な slice map による Fubini 積は trivial になり、これが定理 2.3 の中身であるとも言える(定理 2.3 の onto の証明参照)

Fubini 積は又その中の特定な場合には nuclearity と深い関係がある([50; 定理 4.4 の (i)])ばかりでなく approximation property とも関係が深く、実際 Banach 空間の λ-テンソル積においては E が approximation property をもつことと

$\forall G \supset E,\ \forall K \supset F$ について

$$F_{G\otimes_\lambda K}(E, F) = E\otimes_\lambda F$$

となることとは同値である([50]).

この他から§1 については C^* 環ばかりでなくその subspace 上(又はその間の) CP-map に関する Arveson [2], [3] の研究もみのがすことは出来ないものである

最後に C^* 環の injective hull についての浜名[59][60] にふれておく。Injective な C^* 環は自動的に最低 AW^* 環に

なってしまう([43])ので一般のC^*環のcategoryの中ではinjectivityを考えることが出来ない。しかしBanach空間での事情から推察してもあたえられたC^*環Aのある意味でのC^*-envelopeとしてAを含むinjective C^*環の存在が考えられるが浜名[59]はそれを証明したものである。ただ、Banach空間の時と違って、ここでは、AがあるinjectiveなC^*環Bの部分環になっていても、AのC^*-injective envelopeはBの中にC^*部分環としては(必ずしも)埋めこむわけにはいかない。しかしBのself-adjointなsubspaceとしてなら埋めこむことが出来る。これからinjectivityのC^*環への関係について§4とは別な面での色々な研究が期待される。Aの例えばself-adjoint partのBanach空間としてのInjective hullとC^*-injective hullとの関係などもその一つである。

文　献

1. J. Andersen, A C^*-algebra A for which Ext(A) is not a group, preprint

2. W. B. Arveson, Subalgebras of C^*-algebras, Acta Math. 123 (1969), 141-224

3. ———, ——— II, Acta Math. 128 (1972), 271-308

4. ———, A note on essentially normal operators, Proc. Roy. Irish. Acad. (1974), 143-146

5. ———, Notes on extension of C^*-algebras, Duke Math. J., 44 (1977), 329-356

6 L. G. Brown, Extensions and the structure of C^*-algebras, Symposia Math. 20 (1975), 539-566

7. L. G. Brown, R. G. Douglas and P. A. Fillmore, Unitary equivalence modulo the compact operators and extensions of C^*-algebras, Lecture Note in Math. 345 (1973), 58-128. Springer

8. ———, Extensions of C^*-algebras and K-homology, Ann. Math., 105 (1977), 265-324

9. M. D. Choi, Positive linear maps on C^*-algebras,

Can. J. Math. 24 (1972), 520-529

10. M. D. Choi, A Schwartz inequality for positive linear maps on C^*-algebras, Illinois J. Math. 18 (1974), 565-574

11. ———, A simple C^*-algebra generated by two finite order isometries, preprint

12. A. Connes, Classification of injective factors, Ann. of Math. 104 (1976), 73-115

13. ———, On the classification of von Neumann algebras and their automorphisms, Symposia Math. 20 (1975), 435-478

14. M. D. Choi and E. G. Effros, Injectivity and operator spaces, J. Functional Anal. 24 (1977), 156-209

15. ———, Nuclear C^*-algebras and the approximation property, Amer. J. Math. に掲載の予定

16. ———, Separable nuclear C^*-algebras and injectivity, Duke Math. J. 43 (1976), 309-322

17. ———, Nuclear C^*-algebras and injectivity; The general case, preprint

18. ———, The completely positive lifting problem, Ann. of Math. 104 (1976), 585-609

19 ———, Lifting problem and the cohomology

of C^*-algebras, preprint

20 J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, 2nd ed. Paris, 1969.

21 E. G. Effros, Approximation problems for C^*-algebras, preprint

22. ———, Injectives and tensor products for convex sets and C^*-algebras, Lecture Note at NATO Institute at the Univ. College of Swansea, Wales 1972.

23. ———, Aspects of noncommutative order, 第2回日米セミナー講演記録, Los Angeles, 1977.

24 E. G. Effros and E. C. Lance, Tensor products of operator algebras, Advances in Math. 25 (1977), 1–34

25 T. Furuya, Remarks on the slice map problems for C^*-algebras, preprint

26 D. B. Goodner, Projections in normed linear spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 69 (1950), 89–108

27 E. P. Greenleaf, Invariant means on topological groups, von Nostrand 1969

28 A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955)

29 M. Hasumi, The extension property of complex Banach

spaces, Tôhoku Math. J., 10(1958), 135–142

30. U. Haagerup, The standard form of von Neumann algebras, Math. Scand. 37(1975), 271–283

31. ———, An example of a non nuclear C^*-algebra, which has the metric approximation property, preprint

32 J. Hakeda and J. Tomiyama, On some extension property of von Neumann algebras, Tôhoku Math. J., 19(1967), 315–323

33. J. L. Kelley, Banach spaces with the extension property, Trans. Amer. Math. Soc., 72(1952), 323–326

34. L. Nachbin, A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc., 68(1950), 28–46

35. E. C. Lance, On nuclear C^*-algebras, J. Functional Anal., 12(1973), 157–176

36 ———, Tensor products of non-unital C^*-algebras, J. London Math. Soc., 12(1976), 160–168

37. T. Okayasu, Some cross norms which are not uniformly cross, Proc. Japan Acad., 46(1970), 54–57

38 ——— and M. Takesaki, Dual spaces of tensor products of C^*-algebras, Tôhoku Math. J., 18(1966), 332–337

39 T. Okayasu, On the tensor products of C^*-algebras, Tôhoku Math. J., 18(1966), 325–331

40 R. T. Powers and E. Størmer, Free states of the canonical anticommutation relations, Comm. Math. Phys., 16 (1970), 1-33

41. S. Sakai, C^*-algebras and W^*-algebras, Springer 1971.

42 W. F. Stinespring, Positive functions on C^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 6 (1955), 211 - 216

43. J. Tomiyama, On the projection of norm one in W^*-algebras, Proc. Japan Acad. 33 (1957), 608 - 612

44 ————, On the product projection of norm one in the direct product of operator algebras, Tôhoku Math. J., 11 (1959), 305 - 313

45 ————, On the tensor products of von Neumann algebras, Pacific J. Math., 30 (1969), 263 - 270

46 ————, Tensor products and projections of norm one in von Neumann algebras, Lecture note, Univ. of Copenhagen (1970)

47 ————, Applications of Fubini mappings to tensor products of Banach algebras, Seminar, Univ. of Copenhagen (1970)

48 ————, Tensor products and approximation problems of C^*-algebras, Publ. Research Inst. for Math. Sci. Kyôto Univ., 11 (1975), 163 - 183

49. J. Tomiyama, Fubini algebras and the commutation theorem for tensor products of C^*-algebras, Symposia Math. 20 (1976), 27-37

50 ——————, Some aspects of the commutation theorem for tensor products of operator algebras, Proc. of International Colloquium on "Algebras of operators and their applications to mathematical physics", Marseille 1977.

51 M. Takesaki, A note on the cross norm of the direct product of operator algebras, Kōdai Sem. Rept. (Math.) 10 (1958), 137-140

52 ——————, Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Lecture note in Math. 128, Springer

53 ——————, Duality for crossed product and the structure of von Neumann algebras of type III, Acta Math. 131 (1973), 249-310

54 S. Wassermann, On tensor products of certain group C^*-algebras, J. Functional Anal. 23 (1976), 239-254

55 ——————, Injective W^*-algebras, preprint

56 ——————, A pathology in the ideal space of $L(H) \otimes L(H)$, preprint

57 P. Enflo; A counterexample to the approximation

problem in Banach spaces, Acta Math. 130 (1973), 309-317

58. D. Voiculescu, A non-commutative Weyl-von Neumann theorem, Rev. Roum. Math., 21 (1976), 97-113

59 M. Hamana, Injective envelopes of C^*-algebras, J. Math. Soc. of Japan に掲載予定

60 ————, Injective envelopes of operator systems, preprint